جوتلوب فريجه

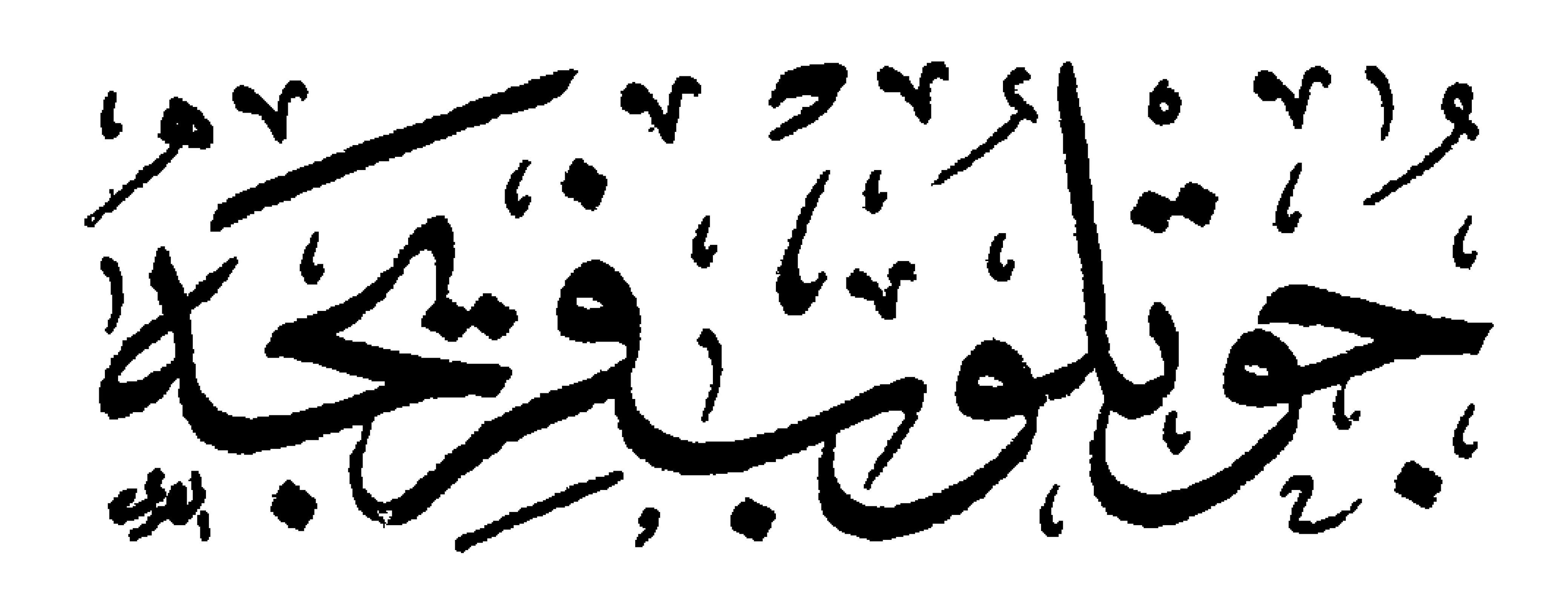
نظرية الإعداد بين الابستمولوجيا والانطولوجيا

دكتور
محمد محمد قاسم

١٩٩١

دار المعرفة الجامعية
٤٠ ش سوتير - إسكندرية
ت : ٤٨٣٠١٦٣

فلاسفة العلم (٢)



جوتلوب فريجة

(نظرية الأعداد بين الابستمولوجيا والأنطولوجيا)

تأليف

دكتور
محمد محمد قاسم

دار المعرفة الجامعية
٤٠ ش سوتير - اسكندرية
ت : ٤٨٣٠١٦٣

بسم الله الرحمن الرحيم

محتويات الكتاب

الفصل الأول : « فريجه » حياته وأعماله

الفصل الثانى : تقويم الرياضيات

الفصل الثالث : الأعداد (موضوع علم الحساب)

الفصل الرابع : طبيعة الأعداد

الفصل الخامس : وجود الأعداد

« مقدمـــــة »

جوتلوب فريجه عالم رياضيات مجدد وفيلسوف مبتكر ، أحدث ثورة فكرية نالت من مفاهيم سادت فى الرياضيات والمنطق والفلسفة ، واقترح مفاهيم وأفكار جديدة أصبحت أسسا لنظريات قائمة حتى اليوم . وقد ظهرت فلسفة « فريجه » مواكبة للحركة النقدية فى أسس العلوم والرياضيات ، وإليه يعود الفضل — ومعه « رسل » — فى إعادة النظر فى مبادىء وأسس الرياضيات .

رأى « فريجه » أن سبيل إصلاح الرياضيات هو ردها إلى المنطق بعد تخليصه مما علق به من شوائب وعيوب تقليدية منذ « أرسطو » و « هيجل » . وقد آثرنا أن ندرس « فريجه » من هذا المدخل ؛ باستقصاء محاولته رد الرياضيات — وبخاصة علم الحساب وقوامه العدد — إلى أصول منطقية . وكان علينا أن نتوقف طويلا عندفكرة العدد لنناقش موضوعات أساسية تتعلق بتعريف العدد وكيفية ادراكه ووجوده .

يناقش بحثنا فرضا أساسياه يعني ببيان آراء « فريجه » فى نظرية « الأعداد الطبيعية فى ضوء علاقة المنطق بالرياضيات » ، ويمتد هذا الفرض ليتناول فكرة العدد بين مبحثين فلسفيين هما الوجود والمعرفة . وكان علينا عند التحقق من هذا الفرض أن نناقش مجموعة من الفروض الفرعية التى تندرج تحته وتأخذ لدينا شكل هذه التساؤلات :

— كيف رد « فريجه » الرياضيات إلى المنطق : وكيف حاول فى مقابل ذلك بناء نظام منطقي شبيه بأنظمة الرياضيات .
— كيف تعد نظرية الأعداد الطبيعية — الموضوع الأثير لعلم الحساب — إمتدادًا للمنطق .
— ما مدى استخدام « فريجه » لغة الفلسفة ومبادىء المنطق فى بيان الطبيعة الموضوعية للأعداد

— هل كان « فريجه » — بصدد بحثه فى نظرية الأعداد — واقعيا أفلاطونيا أم مثاليا كانطيا .

— هل ظل « فريجه » متمسكا بالمنطق كأساس للرياضيات ، أم اقترح أساسا جديدا للمعرفة بما فيها الرياضيات .

اعتمدنا على أعمال « فريجه » بصفة أصلية للتحقق من هذه الفروض ، كما اعتمدنا على أعمال مجموعة من الكتاب البارعين الذين تناولوا نتاج « فريجه » بالتفسير والتأويل ومنهم « دميت » و « كورى » و « وليم نيل » و « جونز » و « كيتشر » ، وغيرهم . وقد واجهتنا صعوبة واضحة عند قراءة التفسيرات المتباينة لهؤلاء الكتاب ، كما لاحظنا أن اختلافهم فى الرأى حول تصنيف فلسفة « فريجه » يصل بهم إلى حد التناقض . ولم يمنعنا ذلك من التحمس لتفسير أحدهم دون تفسير آخر ، أو إقتراح تفسير من جانبنا نرى أنه يتسق مع الخطوط العامة لفلسفته .

وجاء حديثنا — فى أغلب الأمر — عن الأفكار والتصورات الرياضية بلغة التصورات المنطقية ، وذلك تلبية لرغبتين : رغبة « فريجه » فى رد الأولى إلى الثانية ، ورغبتنا تجنب الخوض فى اللغة الفنية للرياضيات متى قامت لغة المنطق ببيان ما نقصد . وآثرنا اصطناع لغة موجزة حاولنا قدر استطاعتنا أن تتسم بالدقة والوضوح ؛ على أمل أن نفلح فى التعبير عن جانب هام من فلسفة « فريجه » ، وأن نقدمه لجماعة جادة من دارسى الفلسفة يتصف عملهم حتى الآن بالدقة والاخلاص .

بقى أن أذكر أن هذا البحث قد امتد العمل فيه خمس سنوات ، بدأته بمدينة صنعاء 1984 وانتهيت منه بمدينة الكويت 1989 ، وقد ظهرت صياغة أولية له فى الكتاب التذكارى التى نشرته جامعة الكويت عن الدكتور زكى نجيب محمود عام 1987 . ولا يفوتنى فى هذه المقدمة أن أشكر كل من قدم لى العون من أساتذتى ، وأخص منهم بالذكر الدكتور عبد الحميد صبرة رئيس قسم تاريخ العلوم بجامعة هارفارد .

الكويت 1989/10/10   محمد قاسم

الفصل الأول
« فريجه » حياته وأعماله

الفصل الأول
« فريجه » حياته وأعماله

1 ــ حياته :

أن من يستقصى حياة « فريجه » يواجه صعوبة تماثل صعوبة البحث فى فلسفته ، فلم يخلف لنا على عادة بعض الفلاسفة والمفكرين سجلا واضحا لمراحل حياته وتطوره الفكرى . بل أثر أن يعيش حياته الخاصة منعزلا عن طلابه وزملائه ، ولم نعثر منها إلا على النزر اليسير .

ولد « جوتلوب فريجه » Gottlob Frege فى الثامن من نوفمبر سنة 1848 فى بلدة « فيزمر » Wismar بألمانيا ، حيث كان يعمل والده « الكسندر فريجه » مديرا لمدرسة عليا للبنات ، وكانت أمه من أصل بولندى ، وقد كفلته بعد موت أبيه فى عام 1866 . التحق بجامعة « يينا » Jena عام 1869 حيث درس لمدة عامين ، ثم التحق بجامعة « جوتنجن » Gottingen لعامين آخرين تفرغ فيهما لدراسة الرياضيات والفيزياء والكيمياء والفلسفة . وعاد إلى « يينا » ليحصل من جامعتها على درجة الدكتوراه فى الرياضيات[1] .

قضى « فريجه » معظم حياته العملية فى تدريس الرياضيات بجامعة يينا ، كان مدرساً خاصاً فى عام 1871 ، ثم منح درجة الأستاذية فى عام 1879 ، فأستاذ شرف فى مايو 1896 حتى عام 1917 حيث اعتزل التدريس إلى وفاته فى 26 يوليو 1925 .

---

(1) نشر بحثه فى الدكتوراه عام 1873 بعنوان :
"Uber eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene". Reprinted in Angelelli, (ed.) : [1967] **Studies on Gottlob Frege and Traditional Philosophy, Dordrecht : Reidel, pp. 1-49.**

وعلى المستوى الشخصى ، كانت حياته لا تخلو من كآبة تظللها ؛ تزوج ولكن سرعان ما ماتت زوجته عام 1905 أثناء الحرب العالمية الأولى ، ولم تترك له أبناء ، سوى إبنا بالتبنى هو « الفرد » الذى أصبح مهندسا فيما بعد .

أما عن عقيدته فقد كان لوثريا متحررا ، وكان محافظا فى نطاق السياسة يكن تقديرا عميقا للملكية والقصر ، ويظهر بغضا شديدا للنظم الاشتراكية والديمقراطية . وقد عارض بوضوح الحقوق المدنية للكاثوليك واليهود . ولا يعنى ذلك أنه تحمس لنشر هذه الآراء ، بل كان متفرغا لبحوثه الأكاديمية ، وبيان ذلك أن « فتجنشتين » لاحظ عندما زار « فريجه » فى عام 1920 أنه لا يلقى بالا لمناقشة أى موضوعات سوى ما يتعلق بالمنطق والرياضيات .

ويتفق أسلوب « فريجه » فى التدريس مع طريقة حياته . درس « كارنب » Carnap على « فريجه » فى عام 1914 وكان لمحاضراته أبلغ الأثر عليه من الناحية الأكاديمية ، إلا أن أسلوبه فى التعامل مع طلابه كان شاهدا على العزلة التى فرضها على نفسه ، وعلى تفرغه التام لانجاز مشروعاته العلمية . ينقل « كارنب » هذه الصورة عن « فريجه » فى قاعة المحاضرات :

كانت ملامحه تجعله يبدو متقدما عن عمره الحقيقى بسنوات ؛ ضئيل القوام ، متحفظا ، انطوائيا إلى حد بعيد ، نادرا ما ينظر إلى مستمعيه فلا يرون منه سوى ظهره وهو منخرط فى رسم أشكال رموزه الغريبة أخذا فى شرحها . لم يحدث قط أن وجه طالب إليه سؤالا أثناء المحاضرة أو حتى بعدها ، كما أن مناقشته فيما يقول كانت تبدو لنا أمرا مستحيلا »[2] .

2 - Carnap. R., [1963] : "Intellectual Autobiograpghy", in P.A.Schilpp (ed.) : **The Philosophy of Rudolf Carnap.** La Salle; Open Court, p. 5.

2 ـ أعماله :

نشير هنا إلى بحوث « فريجه » التى حققت شهرة ، وألصقها بموضوع بحثنا الحالى ، وسوف نورد ثبتا كاملا بأعمال « فريجه » : الكتب والمقالات والردود فى نهاية هذا الفصل .

نشر « فريجه » عام 1879 بحثه المشهور « تدوين الأفكار : لغة صورية للفكر تحاكى لغة علم الحساب »[3] . واكتسب هذا البحث أهمية خاصة لأنه كان أول خطوة فى بناء لغة رمزية منطقية تقوم على البرهان والاستنتاج . ورغم عدم الترحيب بهذه الخطوة من قبل علماء عصره ، لاستخدام « فريجه » مصطلحا رمزيا غير مألوف ، إلا أنها كانت أول لغة رمزية يمكن التعبير بها عن جميع القضايا المنطقية . بالاضافة إلى تميزها بالقابلية للاشتقاق حيث وضع « فريجه » قوانين استنتاجية نحصل بموجبها على قضايا ضرورية مشتقة من بديهيات أو من قضايا سبق أن برهن على صحتها . وكان أحد أهداف « فريجه » الأساسية من هذا البحث هو تحرير المنطق من ذلك القيد الذى يربطه بقواعد اللغة الدارجة[4] .

عكف « فريجه » على العمل المكثف فى فلسفة المنطق وفلسفة الرياضيات ، وخرج بكتابه **أسس علم الحساب** عام 1884 متميزا به عن علماء الرياضيات فى عصره ، حيث حاول أن يقدم فيه تعريفا للعدد يقوم على الأفكار المنطقية دون الميتافيزيقية منها أو التجريبية ، وكان يهدف إلى نقد آراء الرياضيين فى عصره ، لاحظ أن بعضها يستند إلى قول « جون ستيوارت مل » بأن قضايا علم الحساب ذات طابع إستقرائى ، ويعتمد البعض الآخر على رأى « كانط » فى طبيعة قوانين الحساب ، ثم ناقش فى نفس الكتاب آراء « كانتور »

---

(3) Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Reprinted in Geach and Blak, Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege, Oxford, 1966, pp. 1-20.

(4) Kneale, W. & M., [1984] **The Development of Logic**, Oxford, p. 436.

و « شرودر » ، وانتهى إلى أن نظرة معاصريه لبنية علم الحساب نظرة يعتورها نقص شديد ، وأن الدقة الظاهرة فى البراهين الرياضية السابقة عليه دقة خادعة لأن جل ما يحققه علماء الرياضيات هو مجرد يقين تجريبى[5] .

قدم « فريجه » بعد ذلك سلسلة من المقالات الفلسفية التى تعكس تصوره لفلسفة المنطق[6] . وقد احتوت على آراء عميقة وتحليلات دقيقة ، إلا أنها قوبلت بمشاعر عدائية من معاصريه . هذه المقالات هى : « الدالة والتصور » عام 1891 ، ناقش فيها « فريجه » مفهوم الدالة فى الرياضيات ومدى مطابقتها لمفهوم التصور فى المنطق ، وتوصل إلى أن الرياضيات ليست إلا منطقا متطورا . ثم مقالة « التصور والموضوع » عام 1892 التى أقام فيها تمييزا واضحا بين التصور أو المحمول وبين الموضوع الذى يندرج تحته ، مشيرا إلى الترابط بين « المعنى والتصور » و « الدالة والموضوع » ، وهذا يدل على أن المعنى هو التصور الذى نعبر عنه بلغة ، وأنه يختلف عن الموضوع الذى يندرج تحته أو عن الدلالة التى يشير إليها المعنى . ولهذا التمييز أهمية واضحة حيث أصبح أساسا فى التمييز بين القضايا والأفكار العلمية والفلسفة ، كما أنه مفيد فى التحليل المنطقى عند الحكم على عبارة ما بأنها فارغة أو أن لها معنى ودلالة . وظهرت المقالة الثالثة فى نفس العام تحت عنوان « المعنى والدلالة » يميز فيها بوضوح بين العبارة باعتبارها متوالية مؤلفة من أشياء منطوقه أو اشارات مكتوبة وبين المعنى الذى يرتبط بالعبارة والذى يختلف تمام الاختلاف عن الموضوع الذى تشير إليه العبارة .

---

(5) Frege, G., [1884] **The Foundations of Arithmetic,** (Translation by JH. L. Austin) [1950], Oxford. p. ix.

(6) نقلت هذه المقالات إلى الانجليزية فى كتاب Geach و Black المشار إليه آنفا وهى : "Funktion Und Begriff" "Function And Concept" pp. 21-41, "Uber Begriff Und Gegenstand" as "On Concept and Object" pp. 42-55, "Uber Sinn und Bedeutung as "On Sense and Reference" pp. 56-78.

وفى عام 1893 أخرج « فريجه » الجزء الأول من كتابه الهام **القوانين الأساسية لعلم الحساب** Grundgesetze der Arithmatik ، أجرى فيه بعض التعديلات على نسقه الرمزى ، بالاضافة إلى تطوير بالغ الدقة لنظرية أسس علم الحساب ، حيث تناول الأسس المنطقية لبناء لغة رمزية ، وناقش من جديد مفاهيم الدالة والتصور والعلاقة ، وانتقل إلى بيان وتفسير الصيغ الرمزية التى اقترحها ، ثم عرض لقواعد الاستنتاج وكيفية اشتقاق بعض القضايا من البديهيات والقوانين ، وتفرغ بعد ذلك للأعداد ــ مناقشا طبيعة البرهنة عليها ــ ومنها الصفر والعدد واحد بوجه خاص حيث لم يقتنع بتعريفات معاصريه لهما . ومع صدور هذا الجزء الهام من الكتاب تزايد شعور « فريجه » بالمرارة نتيجة تجاهل المعاصرين له باستثناء « بيانو » Peano الذى خصه بتعليق على هذا الكتاب . أمّا الجزء الثانى للكتاب فقد صدر عام 1903 وبدأه « فريجه » بنقد لمفاهيم سائدة ، ومنها نظريات الأعداد الصماء ، ويحتوى على نظريته فى التعريف وشروطه بالاضافة إلى تناوله نظريتى العلاقات والفئات من جديد .

لم ينشر « فريجه » الجزء الثالث من القوانين الأساسية كما كان مقترحا ، بل نشر مجموعة أخرى من المقالات الفلسفية والرياضية ، منها على سبيل المثال[7] :

1903 ــ أسس علم الهندسة .

1904 ــ ما الدالة ؟

1906 ــ كتاباتى وعائدها المتوقع .

1914 ــ المنطق عبر الرياضيات .

1918 ــ الأفكار .

1924 ــ العدد .

1924 ــ مصادر المعرفة فى الرياضيات وفى علوم الطبيعة الرياضياتية .

1924 ــ محاولة جديدة لوضع أساس لعلم الحساب .

---

(7) Currie, G., [1982] Frege, An Introduction to His Philosophy, The Harvester Press Limited, London, pp. 201-203.

وقد حاول « فريجه » فى هذه المقالات أن يبلور آراءه فى بعض الموضوعات ويطورها فى موضوعات أخرى ، كما فعل فى المقالة الأخيرة التى لا تتجاوز خمس صفحات عندما اقترح أساسا جديدا لعلم الحساب ، بالاضافة إلى الأساس المنطقى الذى تفرغ لاثباته فى معظم أعماله[8] .

تتميز أعمال « فريجه » بأنها وضعت أسسا واضحة لعلوم جديدة مثل المنطق الرمزى وفلسفة اللغة وفلسفة الرياضيات . وقد بلغ تأثير أعماله أوجه بعد وفاته وكان الشائع أن هذه الأعمال ظلت مجهولة حتى كشف عنها « رسل » مع بداية هذا القرن ، وقد زكى « رسل » هذا الاتجاه فى كتابه **أصول الرياضيات** 1903 ، وذهب إليه أيضا « لويس » و « لانجفورد » فى كتابهما **المنطق الرمزى** 1932 . والحقيقة التى يكشف عنها « نديتش » فى مقال له هى اطلاع « بيانو » و « رسل » على أعمال « فريجه » فى وقت مبكر ونقلهما عنه كثيرا من آرائه وصياغتها بلغة أكثر سهولة ـــ مما كانت عليه عنده ـــ فى كتبهما التى ظهرت بعد كتب « فريجه » بسنوات[9] .

كان « فريجه » يعانى من تجاهل علماء وفلاسفة عصره لأعماله ، أو تصنعهم اهمالها على الأقل ، إلا أنه كان مدركا فى نفس الوقت لجدتها وأهميتها ، وقد كتب عبارة موجزة بالغة التأثير لابنه بالتبنى موصيا إياه العناية ببحوثه غير المنشورة عندما يدركه الموت ، يقول فريجه :

> « أى بنى ، لا تزدرى تلك المقالات المخطوطة ، فإنها إن لم تكن ذهبا خالصا ، فهى تحوى ذهبا فى ثناياها ، وانى لعلى يقين من بزوغ فجر يوم تنال فيه موضوعاتها ما تستحق من تقدير ، وتأكد أنها لن تضيع هباء »[10].

---

(8) Ibid., p. 185.

(9) Nidditch, P., [1963] "Peano And the Recognition of Frege" Mind, No. 285, pp. 103-110.

(10) Currie, Op. Cit., p. 3.

لا نزعم أن « فريجه » قد وضع حلولا نهائية لكافة المشكلات التى أثارها ، ولكن يكفيه فخرا — فى نطاق تاريخ الفلسفة وتاريخ العلم — أنه أثار مشكلات وتساؤلات من نوع جديد ؛ ليتفرغ فلاسفة هذا القرن للرد والجواب عنها ، وهل الفلسفة فى حقيقتها سوى سؤال وجواب يعقبه تساؤل جديد .

3 — ثبت بمؤلفات « فريجه »

نعرض فيما يلى ثبتا كاملا بمؤلفات « فريجه » سواء بلغتها الأصلية وهى الألمانية أو منقولة إلى احدى اللغات وأهمها الانجليزية ، بالاضافة إلى ما نقل منها من مقالات فى كتب مستقلة . وقد آثرنا أن يحوى ذلك الفصل الخاص بأعماله . واعتمدنا فى ذلك بصفة أساسية على كتاب « كورى » : **فريجه ، مقدمة لفلسفته** ، علما بأن ثبتا مماثلا يوجد بكتاب « ميشيل دميت » : **تأويل فلسفة فريجه** . وقد آثرنا الأول لسهولة استخدامه وبساطته .

'[1880-81]' means written between 1880 and 1881;
'[-1884]' means up to 1884;
'[1884-]' means 1884 or after.

[1873]: *Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene* [On a Geometrical Representation of Imaginary Figures in the Plane], Doctoral dissertation. Jena: Neuenhann. Reprinted in Angelelli (ed): [1967] pp. 1-49.

[1874a]: *Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen* [Methods of Calculation: based on an extension of the Concept of Magnitude], Habilitationsschrift, Jena: Frommann. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], pp. 50-84.

[1874b]: Review of H. Seeger: *Die Elemente der Arithmetik, fur den Schulunterricht bearbeitet, Jenaer Literaturzeitung*, 1, p. 722. Reprinted in Angelelli (ed): [1967] pp. 85-6.

[1877a]: Review of A. von Gall and E. Winter, *Die Analytische geometrie des Punktes und der Geraden und ihre Anwendung auf Aufgaben, Jenaer Literaturzeitung*, 4, pp. 133-4. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], pp. 87-8.

[1877b]: Review of J. Thomae, *Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Functionen gebraucht werden, Jenaer Literaturzeitung*, 4, p. 472. Reprinted in Angelelli (ed): [1967] p. 89.

[1878]: 'Über eine Weise, die Gestalt eine Dreiecks als Komplexe Grösse aufzuffassen' [On a Way of Représenting the Shape of a Triangle as a Complex Magnitude], *Jenaische Zeitschrift fur Naturwissenschaft*, 12, p. xviii. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], pp. 90-1.

[1879*a*]: *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. [Concept-Writing. A Formal Language of Pure Thought after the Pattern of that of Arithmetic], Halle: Nebert. Reprinted in Angelelli (ed): [1964], pp. vii-88. Translated into English as *Conceptual Notation*, in Bynum (ed): [1972], pp. 101-203.

[1879*b*]: 'Anwendung der Begriffsschrift'. *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*, 13, pp. 29-33. Reprinted in Angelelli (ed): [1964], p. 89-93. Translated into English as 'Applications of the "Conceptual Notation"' in Bynum (ed): [1972], pp. 204-8.

[1880]: Review of R. Hoppe *Lehrbuch der analytischen Geometrie, Deutsche Literaturzeitung*, 1, pp. 210-11. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], pp. 92-3.

[1880-81]: 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift', in Hermes *et al* (eds): [1969], pp. 9-52. Translated into English as 'Boole's Logical Calculus and the Concept-Script' in Long and White (trs): [1979], pp. 9-46.

[1881]: 'Über den Briefwechsel Leibnizens und Huygens mit Papin', *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*, 15, pp. 29-32. Reprinted in Angelelli (ed): [1964], pp. 93-6.

[1879-91]: 'Logik', in Hermes *et al* (eds): [1969], pp. 1-8. Translated into English as 'Logic' in Long and White (trs): [1979], pp. 1-8.

[1882*a*]: 'Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift', *Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik*, 81, pp. 48-56. Reprinted in Angelelli (ed): [1964], pp. 106-14. Translated into English as 'On the Scientific Justification of a Conceptual Notation', in Bynum (ed): [1972]: , pp. 83-9.

[1882*b*]: 'Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift', in Hermes *et al* (eds): [1969]: , pp. 53-9. Translated into English as 'Boole's logical Formula-language and my Concept-script', in Long and White (trs): [1979], pp. 47-52.

[1882-3]: 'Über den Zweck der Begriffsschrift', *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*, 16, pp. 1-10. Reprinted in Angelelli (ed): [1964], pp. 97-106. Translated into English as 'On the Aim of the "Conceptual Notation"', in Bynum (ed): [1972], pp. 90-100.

[-1884]: 'Dialog mit Punjer über Existenz', in Hermes *et al* (eds): [1967], pp. 60-75. Translated into English as 'Dialogue with Punjer on Existence', in Long and White (trs): [1979], pp. 53-67.

[1884*a*]: 'Geometrie der Punktpaare in der Ebene', [Geometry of Point Pairs in the Plane], *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*, 17, pp. 98-100. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], pp. 94-8.

[1884*b*]: *Die Grundlagen der Arithmetik*. Breslau: Koebner. Translated into English as *The Foundations of Arithmetic* (with German on facing pages) by J. L. Austin. Oxford: Blackwell, 1953.

[1885*a*]: Review of H. Cohen, *Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte, Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik*, **87**, pp. 324-9. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], pp. 99-102.

[1885*b*]: 'Erwiderung auf Cantors Rezension der *Grundlagen der Arithmetik*'. [Reply to Cantor's review of the *Foundations of Arithmetic*] *Deutsche Literaturzeitung*, **6**, p. 1030. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], p. 112.

[1885*c*]: 'Über formale Theorien der Arithmetik', *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*, **19**, pp. 94-104. Reprinted in Angelelli (ed): [1964], pp. 103-11. Translated into English as 'On Formal Theories of Arithmetic', in Kluge (ed): [1971], pp. 141-53.

[1890-92]: 'Entwarf zu einer Besprechung von Cantors *Gesammelten Abhandlungen zur Lehre vom Transfiniten*', in Hermes *et al* (eds): [1969], pp. 76-80. Translated into English as 'Draft towards a Review of Cantor's *Gesammelte Abhandlungen zur Lehre vom Transfiniten* in Long and White (eds): [1979], pp. 68-71.

[1891*a*]: 'Über das Tragheitsgesetz', *Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik*, **98**, pp. 145-61. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], pp. 113-24. Translated into English as 'On the Law of Inertia', *Studies in the History and Philosophy of Science*, **2**, pp. 195-212.

[1891*b*]: 'Funktion und Begriff'. Jena: Pohle. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], pp. 124-42. Translated into English as 'Function and Concept' in Geach and Black (eds): [1952], pp. 21-41.

[1891-2*a*]: 'Über den Begriff der Zahl', in Hermes *et al* (eds): [1969], pp. 81-95. Translated into English as 'On the Concept of Number', in Long and White (trs): [1979], pp. 72-86.

[1891-2*b*]: 'Eine kritische Auseinandersetzung mit Kerry', in Hermes *et al* (eds): [1969], pp. 96-127. Translated into English as 'A Criticism of Kerry', in Long and White (trs): [1979], pp. 87-117.

[1892*a*]: 'Über Begriff und Gegenstand', *Vierteljahrsschrift für Wissenschaftliche Philosophie*, **16**, pp. 192-205. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], pp. 167-78. Translated into English as 'On Concept and Object', in Geach and Black (eds): [1952], pp. 42-55.

[1892*b*]: 'Über Sinn und Bedeutung', *Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik*, **100**, pp. 25-50. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], pp. 143-62. Translated into English as 'On Sense and Reference', in Geach and Black (eds): [1952], pp. 56-78.

[1892*c*]: Review of G. Cantor, *Zur Lehre vom Transfiniten, Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik*, **100**, pp. 269-72. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], pp. 163-6.

[1892-5]: 'Ausfuhrung über Sinn und Bedeutung', in Hermes *et al* (eds): [1969], pp. 128-36. Translated into English as 'Comments on Sense and Meaning', in Long and White (trs): [1979], pp. 118-25.

[1893]: *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. 1. Jena: Pohle. Reprinted, Hildesheim: Olms, 1962, Partially translated into English in Furth (ed): [1964].

[1894]: Review of E. Husserl; *Philosophie der Arithmetik, Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik*, 103, pp. 313-32. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], pp. 179-92. Translated into English as 'Review of Dr. E. Husserl's *Philosophy of Arithmetic*', in *Mind*, 81, pp. 321-37, 1972.

[1895*a*]: 'Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders *Vorlesungen über die Algebra der Logik*,' *Archiv für Systematische Philosophie*, 1, pp. 433-56. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], pp. 192-210. Translated into English as 'A Critical Elucidation of some Points in E. Schröder's *Vorlesungen über die Algebra der Logik*', in Geach and Black (eds): [1952], pp. 86-106.

[1895*b*]: 'Le Nombre Entier', *Revue de Metaphysique et de Morale*, 3, pp. 73-8. Reprinted with German translation in Angelelli (ed): [1967], pp. 211-19. Translated into English as 'The Whole Number', *Mind*, 79, pp. 481-86, 1970.

[1896*a*]: 'Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene', *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig Mathematisch-Physische Klasse*, 48, pp. 361-78. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], pp. 220-33. Translated into English as 'On Herr Peano's Begriffsschrift and my Own', *Australasian Journal of Philosophy*, 47, pp. 1-14.

[1896*b*]: 'Lettera del sig. G. Frege all'Editore *Rivista di Matematica*, 6, pp. 53-9. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], pp. 234-9. Translated into English in 'Peano's Review of Frege's *Grundgesetze*', *Southern Journal of Philosophy*, 9, pp. 25-37, 1971.

[1897]: 'Logik', in Hermes *et al* (eds): [1969], pp. 137-63. Translated into English as 'Logic', in Long and White (trs): [1979], pp. 126-51.

[1897-8]: 'Begrundung meiner strengeren Grundsätze der Definierens', in Hermes *et al* (eds): [1969], pp. 164-70. Translated into English as 'The Argument for my stricter Canons of Definition', in Long and White (trs): [1979], pp. 152-6.

[1898-9]: 'Logische Mängel in der Mathematik', in Hermes *et al* (eds): [1967], pp. 171-81. Translated into English as 'Logical Defects in Mathematics', in Long and White (trs): [1979], pp. 157-66.

[1899]: 'Über die Zahlen des Herrn H. Schubert'. Jena: Pohle. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], pp. 240-61.

[1899-1906]: 'Über Euklidische Geometrie', in Hermes *et al* (eds): [1969], pp. 182-4. Translated into English as 'On Euclidean Geometry', in Long and White (trs): [1979], pp. 167-9,

[1903*a*]: *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. 2. Jena: Pohle. Reprinted, Hildesheim: Olm, 1962. Partially translated into English in Furth (ed): [1964] and in Geach and Black (eds): [1952], pp. 137-244.

[1903*b*]: 'Über die Grundlagen der Geometrie I and II', *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 12, pp. 319-24. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], pp. 262-72. Translated into English as 'On the Foundations of Geometry', in Kluge (ed): [1971], pp. 22-37.

[1903-]: 'Notizen Freges zu Hilberts *Grundlagen der Geometrie*', in Hermes *et al* (eds): [1969], pp. 185-8. Translated into English as 'Frege's Notes on Hilbert's *Grundlagen der Geometrie*', in Long and White (trs): [1979], pp. 170-3.

[1904]: 'Was ist eine Funktion?', in *Festschrift Ludwig Bolzmann gewidmet zum sechzigsten Geburtstage*. Leibzig: Barth. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], pp.273-80. Translated into English as 'What is a Function?', in Geach and Black (eds): [1952], pp.107-16.

[-1906]: '17 Kernsätze zur Logik', in Hermes *et al* (eds): [1969], pp.189-90. Translated into English as '17 Key Sentences on Logic', in Long and White (trs): [1979], pp.174-5.

[1906*a*]: 'Über die Grundlagen der Geometrie', I, II und III, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 15, pp.293-309, 377-403, 423-30. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], pp.281-323. Translated into English as 'On the Foundations of Geometry', in Kluge (ed): [1971], pp.49-112.

[1906*b*]: 'Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae', *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. 15, pp.586-90. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], pp.324-8. Translated into English as 'Reply to Mr. Thomae's Holiday Chat', in Kluge (ed): [1971], pp.121-7.

[1906*c*]: 'Über Schoenflies: *Die Logischen Paradoxien der Mengenlehre*', in Hermes *et al* (eds): [1969], pp.191-9. Translated into English as 'On Schoenflies: *Die Logischen Paradoxien der Mengenlehre*', in Long and White (trs): [1979], pp.176-83.

[1906*d*]: 'Was kan ich als Ergebnis meiner Arbeit ansehen?', in Hermes *et al* (eds): [1969], p.200. Translated into English as 'What may I regard as the Result of my Work?', in Long and White (trs): [1979], p.184.

[1906*e*]: 'Einleitung in die Logik', in Hermes *et al* (eds): [1969], pp.201-12. Translated into English as 'Introduction to Logic', in Long and White (trs): [1979], pp.185-96.

[1906*f*]: 'Kurtze Übersicht meiner Logischen Lehren', in Hermes *et al* (eds): [1969], pp.213-18. Translated into English as 'A Brief Survey of my Logical Doctrines', in Long and White (trs): [1979], pp.197-202.

[1908*a*]: 'Die Unmöglichkeit der Thomaeschen formalen Arithmetik aufs neue nachgewiesen', *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 17, p.52-5. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], p.329-33. Translated English as 'Renewed Proof of the Impossibility of Thomae's Formal Arithmetic', in Kluge (ed): [1971], pp.132-7.

[1908*b*]: 'Schlussbemerkung', *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 17, p.56. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], p.333. Translated into English as 'Concluding Remarks', in Kluge (ed): [1971], p.138.

[1912]: 'Remarks on P. Jourdain, "The Development of the Theories of Mathematical Logic and the Principles of Mathematics"', *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 43, pp.237-69. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], pp.334-41.

[1914]: 'Logik in der Mathematik', in Hermes *et al* (eds): [1969], pp.219-70. Translated into English as 'Logic in Mathematics', in Long and White (trs): [1979], pp.203-50.

[1915]: 'Meine grundlegender logischen Einsichten', in Hermes *et al* (eds): [1969], pp.271-2. Translated into English as 'My Basic Logical Insights', in Long and White (trs): [1979], pp.251-2.

[1918*a*]: 'Der Gedanke: Eine logische Untersuchung', *Beiträge zur Philosophie des Deutschen Idealismus*, 1, pp. 58-77. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], pp. 342-62. Translated into English as 'Thoughts', in Geach (ed): [1977], pp. 1-30.

[1918*b*]: 'Die Verneinung: eine logische Untersuchung', *Beiträge zur Philosophie des Deutschen Idealismus*, 1, pp. 143-57. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], pp. 362-78. Translated into English as 'Negation' in Geach (ed): [1977], pp. 31-53.

[1919]: 'Aufzeichnungen für Ludwig Darmstaedter', in Hermes *et al* (eds): [1969], pp. 273-7. Translated into English as 'Notes for Ludwig Darmstaedter', in Long and White (trs): [1979], pp. 253-7.

[1922-]: 'Logische Allgemeinheit', in Hermes *et al* (eds): [1969], pp. 278-81. Translated into English as 'Logical Generality', in Long and White (trs): [1979], pp. 258-62.

[1923]: 'Logische Untersuchungen, Dritter Teil: Gedankengefüge', *Beiträge zur Philosophie des Deutschen Idealismus*, 3, pp. 36-51. Reprinted in Angelelli (ed): [1967], pp. 378-94. Translated into English as 'Compound Thoughts', in Geach (ed): [1977], pp. 55-77.

[1924*a*]: 'Tagebucheintagungen über den Begriff der Zahl', in Hermes *et al* (eds): [1969], pp. 282-3. Translated into English as 'Diary Entries on the Concept of Number', in Long and White (trs): [1979], pp. 263-4.

[1924*b*]: 'Zahl', in Hermes *et al* (eds): [1969], pp. 284-5. Translated into English as 'Number', in Long and White (trs): [1979], pp. 265-6.

[1924-5*a*]: 'Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften', in Hermes *et al* (eds): [1969], pp. 286-94. Translated into English as 'Sources of Knowledge of Mathematics and Mathematical Natural Sciences', in Long and White (trs): [1979], pp. 267-74.

[1924-5*b*]: 'Zahlen und Arithmetik', in Hermes *et al* (eds): [1969], pp. 295-7. Translated into English as 'Numbers and Arithmetic', in Long and White (trs): [1979], pp. 275-7.

[1924-5*c*]: 'Neuer Versuch der Grundlegung der Arithmetik', in Hermes *et al* (eds): [1969], pp. 298-302. Translated into English as 'A New Attempt at a Foundation for Arithmetic', in Long and White (trs): [1979], pp. 278-81.

وهذا ثبت بالكتب التى تحوى مقالات « فريجه » منقولة إلى الانجليزية ، أو كتب له ترجمت بكاملها :

Angelelli, I. (ed): [1964]: *Begriffschrift und andere Aufsätze.* Hildesheim: Olm.

Angelelli, I. (ed): [1967]: *Kleine Schriften.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Bynum, T. W. (ed): [1972]: *Conceptual Notation and Related Articles.* Oxford. Clarendon Press.

Furth, M. (ed): [1964]: *The Basic Laws of Arithmetic.* University of California Press.

Gabriel, G., Hermes, H., Kambartel, F., Thiel, C. and Veraart, A. (eds): [1976]: *Wissenschaftlicher Briefwechsel.* Hamburg: Meiner.

Geach, P.T.(ed): [1977]: *Logical Investigations.* Oxford: Blackwell.

Geach, P.T. and Black, M. (eds): [1952]: *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege* Oxford: Blackwell.

Hermes, H., Kambartel, F. and Kaulbach, F. (eds): [1969]: *Nachgelassene Schriften.* Hamburg: Felix Meiner.

Kluge, E.H.W. [1971]: *On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic.* Yale University Press.

Long, P. and White, R. [1979]: *Posthumous Writings.* Oxford: Blackwell.

McGuinness, B. (ed) and Kaal, H. (trs): [1980]: *Philosophical and Mathematical Correspondence.* Oxford: Blackwell.

الفصل الثانى

تقويم الرياضيات

الفصل الثانى
تقويم الرياضيات

مقدمة :

يقوم بحثنا على فرض أساسى : لنفترض أن « فريجه » كانت تراوده فكرة رد الرياضيات ـــ بما فيها علم الحساب ـــ إلى المنطق ، إلا أنه لاحظ مدى تخلف المفاهيم المنطقية فى عصره بالاضافة إلى عيوب ناتجة عن التمسك بالمنطق بصورتيه الأرسطية والهيجلية معا . فأحسّ بضرورة استحداث أفكار منطقية جديدة مع وضع مصطلح رمزى للمنطق يقترب به نحو مزيد من الصورية واليقين . ونفترض كذلك أن محاولته رد الرياضيات إلى أصول منطقية اقتضت منه تخليص الرياضيات مما علق بها من شوائب وتفسيرات تخالف طبيعتها . لقد أحدث « فريجه » بمحاولته هذه ثورة فريدة فى نطاق المنطق والرياضيات معا شملت نتائجها مباحث فلسفية كما إمتد تأثيرها لعدد كبير من معاصريه من فلاسفة العلم واللاحقين عليه . ولم يتوقف عند حدود النقد والتفنيد وانما حاول بناء نظام منطقى شبيه بالأنظمة المعروفة فى الرياضيات مستخدما الرموز والعلامات ، ليكون هذا النظام من جديد أساسا للعلوم الرياضية فى العمليات البرهانية والاستدلالية . ومن الملاحظ أن انجاز « فريجه » كانت تحوطه وتنبث فيه وتبرره آراء ذات طابع فلسفى قح تعبر عن حس فلسفى أصيل ، وإمتدت هذه الآراء فى اتجاهين اتجاه إبستمولوجى وآخر أنطولوجى وان كانا ينطلقان من أرومة واحدة هى مشروع « فريجه » .

1 ـــ حال الرياضيات :

لم يقدم أغلب الفلاسفة السابقين والمعاصرين لفريجه على تقويم التصورات الرياضية الأساسية ولا المعرفة الرياضية ، وكان ما لدى الرياضيين من معرفة بمضمون الرياضيات وخصائص النسق والبرهان متواضعا إذا ما قورن بما يجب أن يكون عليه أهل التخصص . كانت أهمية الرياضيات وقيمتها فى ذلك الوقت تتوقف على ما هو معروف ولا تتوقف كثيرا على كيفية معرفته ، كما كانت ترتبط بمحتوى المعرفة أكثر من ارتباطها بالوضوح الذاتى والنظر فى العلاقات المنطقية[1] . وراح علماء الرياضيات يقيمون استدلالاتهم بناء على أمور تبدو لهم واضحة ، أو ثبت جدواها فى الماضى ، ووقعوا فى الحالين فى اسار الذاتية والبراجماتية .

سوف نتخذ من موقف « فريجه » من العدد أو نظرية الأعداد مثالا على موقفه الاصلاحى الذى أدخله على الرياضيات بصفة عامة ، وعلى علم الحساب بصفة خاصة . ناقش « فريجه » فى كتابه **أسس علم الحساب** سؤالا لم يجد علماء الرياضيات إجابة دقيقة عنه وهو « ما العدد ؟ » ، وذلك لاعتقادهم أن طرح السؤال على هذا النحو يؤدى إلى تناول موضوعات تقع ـــ فى غالب الأمر ـــ خارج نطاق المعرفة الرياضية . لاحظ « فريجه » أن بعض الرياضيين مثل « كرونكر » يعلق على تساؤلنا : ما العدد ؟ بأنه تساؤل غير مقبول ، لأن العدد واضح بذاته وحدسى ولا يحتاج إلى تعريف . ولاحظ أيضا أن هناك من رأى فى الأعداد مجرد رموز أو علامات ، فالأعداد اما علامات لاجراء عمليات حسابية كما يرى « هنكل » ، أو هى علامات لا معنى لها إطلاقا بل مجرد علامات كما يذهب الاسميون ، ولاحظ « فريجه » أخيرا أن هناك من يرى الأعداد بمثابة تجريد سيكولوجى من مواقف تجريبية بحته .

(1) Kitcher, Ph., [1979], "Frege's Epistemology" The Philosophical Review, Vol. LXXX VIII, p. 237.

واجهت « فريجه » هذه التصورات والأفكار الغامضة المختلطة عندما بدأ فى دراسة طبيعة العدد آملا فى تأسيس علم الحساب على أساس محكم ومضمون . وتساءل « فريجه » :

« أليس أمرا شائنا أن يكتنف الغموض علم الحساب وأكثر موضوعاته بساطة (العدد) ؟! ، ان كان تصور أساسى لعلم رائع باعثا على المشكلات بهذه الصورة ، فالحاجة ملحة إذن لفحص هذا التصور بدقة حتى نحل هذه المشكلات .. علينا أن ننقد بعض الآراء التى طرحها علماء الرياضيات والفلاسفة حول بعض المسائل المعقدة بهدف أحياء الرغبة فى مبحث أكثر دقة .. وعلينا نتيجة لذلك مواصلة تقديم استدلالات يغلب عليها الطابع الفلسفى أكثر مما قدمه عديد من علماء الرياضيات ؛ ذلك أن أى بحث فى طبيعة العدد يأتى مرتبطا بالفلسفة دائما . أنه مبحث مشترك بين الرياضيات والفلسفة »(2) .

ويعقد « فريجه » العزم على تناول الاتجاهات المعاصرة بالنقد هادفا رد الرياضيات إلى المنطق ، وكأنى به يعلل حماسه بقوله : « إن سحر وفتنة العمل فى علم الحساب والتحليل أمر يسهل ادراكه ، ومن الأقوال المأثورة : ان مبرر اقامة الدراسة السليمة يكمن فيها ذاتها »(3) . أى أن قيمة علم الحساب كعلم محصن هى سبب كاف لانقاذه من الحالة المتردية التى وصل إليها .

2 ــ نقد المنطق :

جمع « أرسطو » أعماله فى المنطق فى كتاب التحليلات Analytics وكتب أخرى ، وساد شعور قوى لفترة طويلة أن « أرسطو » قال فى هذا الباب كل ما يمكن أن يقال ، وأنه أوصد الباب فى وجه كل مجتهد . ومع بدايات القرن

(2) Frege, G., The Foundations of Arithmetic, pp. I-II and IV-V.

(3) Ibid., p. 115.

التاسع عشر إنبعث منطق جديد ، منطق « هيجل » الجدلى ، له خصائص جديدة إلا أنها لا تلبى حاجات الاصلاح فى الرياضيات . فكانت ثورة « فريجه » على المنطقين معا ، هاجم فى منطق أرسطو ضيق المجال ، وهاجم انتاج « هيجل » على أساس أنه ـــ ليس منطقا وانما ـــ علم نفس[4] .

اهتم « أرسطو » بصفة أساسية ـــ وكما هو معروف لدارس المنطق - بطرق الجمع بين أحكام أو قضايا متنوعة الأنماط على هيئة تؤدى إلى نتائج صحيحة . وقد قسم الأحكام بهذا الصدد بناء على أسس عديدة : فقد تكون موجبة (كل إنسان فان) ، أو سالبة (لا إنسان خالد) ، وقد تكون كلية (كل انسان فان) ، أو جزئية (بعض الناس فانين) ، أو شخصية (سقراط فان) . إلا أنها تأتى فى جميع الحالات على هيئة القضية الحملية التى لا تخرج عن أمرين : إما أن ننسب المحمول إلى الموضوع أو ننفيه عنه . بل أن القضايا التى تبدو لنا للوهلة الأولى على صورة مخالفة ، يمكن اعادة صياغتها فى صورة [موضوع ـــ محمول] .

رأى « أرسطو » أيضا أن الطريقة المثلى للاستدلال هى القياس الذى يتألف من مقدمتين ونتيجة حسب ترتيب معين لحدودهما . وهنا يصبح المنطقى معنيا بمعرفة صحيح القياس من فاسده فى ضوء المامه بقواعد القياس . ولم يكن « أرسطو » مهتما بالنتائج الجزئية للاستدلالات ، وإنما أنصب اهتمامه على كل ما هو كلى بقدر الامكان .

ظل التصور الأرسطى لحدود المنطق ودوره سائدا لألفى عام ، دون أن يجرؤ أحد على المساس به أو تعديله ، وصورة القضية الحملية بوجه خاص . وصاحب ذلك اعتقاد بأن المنطق والرياضيات لا يجتمعان ، فالمنطق ينظر إليه على أنه علم قوانين الفكر ، بينما الرياضيات علم العدد والوصف ، موضوعهما مختلف ومن ثم فطريقة الاستدلال فى أحدهما تختلف عن طريقة العلم الآخر .

(4) Jones, W.T., [1975] A History of Western Philosophy, The Twentieth Century to Wittgenstein and Sartere, Sec. ed. Harcourt Brace Jovanovich, Inc.

صحيح أننا نعلم الآن أن « فريجه » فى أعماله المختلفة ، وكذلك « رسل » فى **أصول الرياضيات** يؤكدان على أن الرياضة والمنطق متطابقان[5] . ويتفقان على « أن جميع قضايا الرياضة الخالصة يمكن استخلاصها من عدد قليل جدا من المبادىء المنطقية الأساسية »[6] . إلا أن هذا التأكيد لم يكن قد وصل إلى مجرد الظن فى بدايات القرن الماضى ، وأن الخطوة الأولى نحو دمج العلمين تمت بطريق المصادفة ودون قصد . فقد ظل علماء الرياضيات يعلنون لمدة طويلة عن عدم رضاهم عن مصادرة التوازى[7] . كما رأوا أنها أقل يقينا من البديهيات الاقليدية ، وعند محاولتهم البرهنة عليها باستخدام برهان الخلف [افتراض كذب المصادرة ينشأ عنه تناقض] لم يقع أى تناقض ، وانما تم إشتقاق مجموعة من المبرهنات المتسقة إتساقا داخليا ويختلف كل نسق فيها عن النسق الاقليدى ، وكانت تلك بدايات الهندسة اللااقليدية . أختلفت الهندسات الجديدة على تنوعها مع هندسة اقليدس فى تصور المكان والفضاء ، وان اتفقت جميعا فى أن لكل منها نسقا ننتقل من مقدمات إلى نتائج بأسلوب منطقى . ويختلف هذا الأسلوب المنطقى عن القياس القديم من كل الوجوه . وفى نفس الوقت كانت تصورات علم الحساب — هى الأخرى — فى مرحلة تحول تامة بهدف اضفاء مزيد من الصورية والاتساق على أنساقه . وهذا ما سنعرض لجانب منه فى فقرات قادمة .

هذا عن بدايات التحول فى الرياضيات ، وفى المنطق كان التحول يعنى ثورة على التقليد السائد التى تمثله القضية الحملية ، واثبات أن هناك صور أخرى للأحكام والقضايا غيرها . لننظر على سبيل المثال فى هذا الاستدلال

(5) رسل : [1903] **أصول الرياضيات** ، ترجمة عربية ؛ محمد مرسى أحمد ، أحمد فؤاد الأهوانى ، ص : 5 .

(6) نفس المرجع : ص 21 .

(7) هى المصادرة الخامسة فى نسق « اقليدس » ، وتنص على أنه : إذا قطع مستقيم A مستقيمين L_1 ، L_2 واقعين فى نفس المستوى ، بحيث يكون مجموع الزوايا الداخلة على أحد جانبى A أقل من مجموع زاويتين قائمتين فان المستقيمين L_1 ، L_2 لابد وأن يتلاقيا إذا مدا بشكل كاف فى الجانب الذى فيه مجموع الزاويتين أقل من زاويتين قائمتين .

القائم على نوع جديد من القضايا : ان كان « أحمد أكبر من أميرة » ، وكانت « أميرة أكبر من محمود » ، فإن « أحمد أكبر من محمود » . كل قضية من هذه القضايا قضية علاقة ، وتكون ثلاثتها استدلالا يقوم على علاقة التعدى ولا يقوم على القياس الأرسطى . أن عبرنا عن ذلك بصورة رمزية قلنا :

[هـ > و ، و > ى ، ∴ هـ > ى]

ونجد أنفسنا أمام صورة منطقية لاستدلال لا يمكن رده إلى الشكل القياسى[8] .

ورغم ذلك فعند مقارنة منطق « أرسطو » بمنطق « هيجل » فالعاقبة فى صالح الأول بلا جدال ؛ ذلك أنه يحمد لأرسطو اهتمامه بالصورة المنطقية والخصائص الصورية للاستدلال ، مما عنى به المناطقه فى نهاية القرن التاسع عشر ولم يهتم به أتباع « هيجل » . وإذا كان المحدثون قد أبرزو الخصائص الصورية للاستدلال عند تطبيق نماذج من الرياضيات على المنطق بصورة أكثر وضوحا مما كانت عليه لدى أرسطو ، فانهم يتفقون مع أرسطو على أنه ليس من شأن المنطق بيان كيف يتعود الناس على التفكير بالفعل ، بل ؛ كيف ينبغى أن نفكر بطريقة سليمة . بمعنى أن المنطق علم معيارى وليس علما وصفيا كما أراده هيجل . ينبغى ألا يختلط المنطق بعلم النفس ، وتلك مقولة أساسية تفرغ « فريجه » لنقضها وتكذيبها طوال أبحاثه . نعم يشترك منطق « هيجل » مع منطق « أرسطو » فى التعويل على الصيغة الكلية [موضوع ــ محمول] ، إلا أن « هيجل » وقع فى خطأ ــ تجنبه أرسطو ــ وهو أنه لم يقدم تصورا واضحا للصورة المنطقية . لقد كان يجهل الصورة المنطقية بالفعل ، وراح العقل عنده يشيد عالما خاصا عبر نشاط خلاق ، ويقف دور المنطق عند مجرد وصف هذا النشاط الذى يغلفه طابع نفسى واضح .

---

(8) Jones, Op. Cit., p. 132

3 ــ نقد النزعة السيكولوجية :

ان غلبة وانتشار طرق سيكولوجية للبرهنة فى الفلسفة قد أدى بها إلى أن تتغلغل فى مجال المنطق ، ولما كانت الرياضيات تخلو تماما من المشاعر والعواطف الوجدانية فلا مجال للتسليم ــ مع بعض الأدعياء ــ بأن أفكارنا عن الأعداد بمثابة ظواهر لبواعث محركة تستند إلى احساسات عضلية ، والا فلن يتعرف عالم للرياضيات على الأعداد بهذا الهراء . لا علاقة للحساب كعلم بالاحساس على الاطلاق ، ذلك أن الاحساسات وما يرتبط بها من درجات وعى تتسم بالتموج والغموض بينما تتسم موضوعات الرياضيات بالدقة التامة والوضوح[9] .

ميز « فريجه » بهذا الصدد بين نوعين من الأمور : أمور موضوعية مستقلة عن حواس الأفراد ، وان كنا ندركها بالحس فانها لا تتغير بتغير تصور الأفراد لها ، وأمور ذاتية تشير إلى التصورات والذكريات والانطباعات وهذه تعتمد فى صحتها على الشخص الذى يتصورها . وقد يتساءل البعض ؛ ألا نستخدم التفكير ــ وهو عملية نفسية ــ عند بحث أصل فكرة ولتكن العدد ؟

ويأتى رد « فريجه » :

« لنتناول بالوصف أصل فكرة ، أو لنعدد الشروط الذهنية والفيزيقية التى ينبغى أن نكون عليها عند ادراكنا قضية نود البرهنة عليها . لكن علينا ألا نخلط بين أمرين : (قضية محل تفكير) ، (قضية صادقة) ، يستند الأمر الأول إلىّ وإليك لكى نفكر فيه ومن ثم فهو نسبى متغير ، بينما يختلف الحال فى الأمر الثانى حيث لا نتصور أن تكف قضية عن الوجود ، أو يتوقف صدقها عندما أتوقف عن التفكير فيها . هل تكف الشمس عندما أغمض عينى ؟! النسبية واضحة فى الأمر الأول والموضوعية أساس الأمر الثانى . ولو سلمنا جدلا برأى أصحاب النزعة النفسية وتصورنا جميع الأشياء فى تغير وتدفق مستمر دون أن يظل شىء ثابتا ، فليس هناك احتمال اذن لتحصيل معرفة عن أى شىء فى العالم »[10] .

(9) Frege, The Foundations ..., P. Y.

(10) Ibid., p. 99.

ولا يتوقف تسرب النزعة النفسية على الرياضيات وعلم الحساب بوجه خاص ، بل انها انتشرت في المباحث المنطقية ، ومن ثم لا يكفي في رأى « فريجه » : « أن نستبعد النزعة النفسية من علم الحساب ، بل علينا انتزاعها من المنطق ان كنا نعتقد أن علم الحساب ما هو إلا منطق متطور ، وأن كل عبارة فيه ليست سوى قانون منطقي »[11] .

يحذرنا « فريجه » من تناول فكرة (القانون المنطقي) بمعنى نفساني أو قائم على التجريد من الواقع . إذا تصور أحدنا المنطق في أسلوبه التقليدي على أنه « فن التفكير الصحيح » ، ورأى بناء على ذلك القوانين المنطقية « خطة توجيه الفكر نحو تحصيل الصدق » ، فان خطر الوقوع في غياهب النزعة النفسية يحيطه . ذلك لأن كلمة « قانون » من الكلمات الغامضة ؛ فقد تعني أحيانا ما هو كائن ، وتعني في أحيان أخرى « ما ينبغي أن يكون » . ويمكن أن يطلق المعنى الثاني على قوانين المنطق ؛ حيث أنها معنية بتحديد طريقة عمل الفكر . لكن عندما يصل الظن بأحدنا إلى حد أن يتصور أن « هذه القوانين توجه الفكر كما توجه القوانين الطبيعية ما ينشأ في العالم الخارجي من ظواهر وعمليات » فانه يحول قوانين الفكر — بظنه أو اعتقاده — إلى قوانين نفسية ، ويحول المنطق بالتالي إلى جزء من علم النفس ، بل وتنحدر قضايا المنطق لتصبح قضايا تجريبية تنشأ عن التفكير في أشياء تجريبية .

هذا ما ينكره « فريجه » ، ويستنكر وقوع المناطقة الخلّص فيه . ويؤكد « فريجه » على هذا المعنى في مقدمته للجزء الأول من كتابه القوانين الأساسية لعلم الحساب ، حيث يقول :

« ان علينا أن نميز بين نوعين من القضايا يخلط بينها المناطقة من أصحاب النزعة النفسانية ، علينا أن نميز بين ما « يؤخذ على أنه صادق » و « ماهو صادق » ، وينسحب هذا التمييز على صدق قوانين المنطق ؛ فهي ليست قوانين نفسية تؤخذ

(11) Ibid..

باقتراض صدقها ، بل ينبغي أن تكون صادقة ، هي كذلك لأنها القوانين التي تحدد مسلك تفكيرنا بصدد تحصيل المعرفة »[12] .

نستطيع أن نعبر عن موقف « فريجه » من النزعة النفسانية باختصار : أن ما يتعلق بالمنطق ينبغي أن ينفصل تماما عما يتعلق بعلم النفس .

4 ــ نقد النزعة الشكلانية :

فاق أصحاب الاتجاه الشكلانى أصحاب الاتجاه النفسانى فى سوء فهم الرياضيات والمنطق . لا يرى هؤلاء فى الرموز إلا أشكالا جوفاء لا تشير إلى مضمون ، وأن ما ينشأ بينها من علاقات لا يزيد عن كونه عمليات آلية ليست لها دلالة بعينها أو واقعا محددا . يقف « فريجه » فى مواجهة هؤلاء واصفا إياهم بالببغاوات ؛ ان الببغاوات تتعلم لفظ الكلمات إلا أنها لا تفكر ولا تدرك أن ما يصدر عنها من ترجيع يعبر عن رموز وإشارات . ومن جهتنا فنحن لا نفكر إلا إذا كانت الكلمات التى ننطقها وما نخطه على الورق من علامات عبارة عن رموز ذات معنى ومغزى . ومن ثم فالرياضيات ليست ــ كما يذهب هؤلاء ــ مجرد تلاعب مبهر بالعلامات طبقا لمجموعة من القواعد التعسفية ، ولا نستطيع أن نقارن عمل عالم الرياضيات بممارسة لعبة مسلية كالشطرنج ذلك أن « ترتيب القطع فى لعبة الشطرنج لا يعنى شيئا على الاطلاق ، فقواعد اللعبة تكوّن نسقا مقفلا ولا تجد أى تطبيق لها خارج اللعبة نفسها ، بينما تعبر الصيغ الحسابية عن أفكار وفى امكان قوانين علم الحساب أن تؤدى إلى تطوير بدون نهاية للعلم نفسه ، كما أنها قابلة لتطبيقات لا حصر لها خارج علم الحساب »[13] .

---

(12) Thiel, Christian, [1968] Sense And Reference In Frege's Logic. Reidel Pub. Comp. Holland, pp. 22-24.

(13) بلاتشيه [1977] نظرية المعرفة العلمية (الابستمولوجيا) ، ترجمة حسن عبد الحميد [1986] ، مطبوعات جامعة الكويت . ص : 127 .

إن التفكير الرياضى يعد تفكيراً بقدر ما ترمز العلامات التى يستخدمها علماء الرياضيات إلى كيانات ، وبقدر براعة العالم فى استخدامه للرموز والعلامات فانه يعكس الطبيعة الحقة لهذه الكيانات الواقعية[14] . وقواعد استخدام الرموز تشتق من المنطق ، فالمنطق فى رأى « فريجه » هو اطار عام يلتزم به عالم الرياضيات حتى يصبح ما يشيده من أنساق مستندا إلى أسس واضحة . يقول « فريجه » عن دراسته **أسس علم الحساب** : « تهدف هذه الدراسة إلى الكشف عن حقيقة فحواها أن اقامة أى استدلال (وليكن مجرد الأنتقال من ں إلى ں + 1) لابد وأن نستند فيه إلى القواعد العامة للمنطق ، ومن يتصور أن استدلالا من هذا النوع يتعلق بعالم الرياضيات فقط ، فهو واهم .. من المحتمل أن نستخدم الأرقام أحيانا بطريقة آلية ، وقد نتكلم كالببغاوات ، إلا أن ذلك لا يستحق أن نطلق عليه فكرا . أنه يصبح فكرا بعد أن يتطور الترميز الرياضى نتيجة لفكر أصيل ، بدرجة تجعل التفكير بذاته هاديا لنا كإله ـــ ان جاز التعبير ـــ يخلق بإرادته المطلقة ما يشاء »[15] .

5 ـــ نقد النزعة التجريبية :

يأتى « مِل » Mill على رأس التجريبيين القائلين بأن كل مالدينا من حقائق وقوانين تعود إلى مصدر وحيد هو الخبرة الحسية ، وأن كل مالدينا من معارف يستند إلى أساس تجريبى . ومن ثم فإن القضايا العددية ليست قبلية . يقول « مِل » أن الأعداد ليست مستقلة بذاتها ، فجميع الأعداد يجب أن تكون أعدادا لأشياء ، ولا توجد أعداد قائمة بذاتها أو مجردة ، بل يشير كل رقم 2 ، 3 ، 4 الخ .. إلى ظواهر فيزيائية ويحمل خاصية فيزيائية[16] . من الصحيح أن معظم التجريبيين قد تحاشوا الوقوع فى خطأ الشكلانيين ، حين رأوا أن

(14) وصف الكيانات بالواقعية هنا ؛ وصف لها بالثبات والدوام والموضوعية ، ولا يختلف ـــ عند فريجه ـــ أو يستند إلى أى أمور محسوسة أو فيزيقية متغيرة .

(15) Frege, The Foundations, p. IV & p. 119.

(16) Thiel, Op. Cit., p. 26.

الرياضيات ليست مجرد تناول بارع للعلامات ، بل ذهبوا إلى أن الرياضيات تبحث فى كيانات واقعية ترمز لها تلك العلامات ، إلا أنهم ذهبوا إلى أن هذه الكيانات الواقعية بمثابة صفات محسوسة لأشياء محسوسة ، وهذا هو أساس الخلاف بينهم وبين « فريجه » .

يمكن قبول وجهة نظر التجريبيين بتحفظ شديد أن حصرنا أنفسنا فى نطاق الأعداد الصحيحة[17] . ويستنتج من ليس له دراية بالرياضيات أنه مثلما أن الأحمر اسما لخاصية فى أشياء محسوسة ، وكذلك الأزرق بالنسبة لأشياء أخرى ، فان « اثنين » تعد بالتالى اسم خاصية توجد فى بعض المجاميع ، و « ثلاثة » اسم خاصية مميزة لمجاميع أخرى . إلا أن أراء التجريبيين تصبح بلا مسوغ ومرفوضة تماما عندما يتعلق الأمر بالأعداد الصماء[18] . أن من يزعم أن « ثلاثة » خاصية لمجموع ذى ثلاثة أجزاء ، فعليه أن يقدم لنا ــ ولو على سبيل التحدى ــ أمثلة على مجموع ذى √ – ١ من الأجزاء . ويصف « فريجه » موقف هؤلاء مزدريا وهن حجتهم « أصبح علم الحساب عندئذ مثل كعكه زنجبيل محشوة بالحصى » ، وأن تصورهم لا يلائم الأعداد الصحيحة الموجبة فى جانب منها ، ذلك لأن عدد مجموع ما يعتمد على طريقة تفكيرنا فيه . مثال ذلك أن تساءلنا : ما عدد المجموع المعروف لنا بإلياذة « هوميروس » ؟ قد يقول قائل : انها قصيدة **واحدة تقع فى أربعة وعشرين** كتابا وعدد **كبير** من الأبيات وعدد **هائل** من الكلمات[19] . يقول « فريجه » بصدد معارضته للنزعة التجريبية عند « مل » بوجه خاص :

---

(17) يقصد بالعدد الصحيح أحد هذه المعانى الثلاثة :

ــ أحد الأعداد 0 ، 1 ، 2 ، 3 ....

ــ أحد الأعداد 1 ، 2 ، 3 ....

ــ أحد الأعداد - 3 ، - 2 ، - 1 ، 0 ، 1 ، 2 ، 3 ....

(18) العدد الأصم : قطاع لسلسلة من الكسور ليس لها حد منطقى مثل : √ 2 ، √ 5 .

(19) Jones, Op. Cit., p. 138.

« كان « جون مل » على حق فى قوله بأن تفاحتين تختلفان من الناحية الفيزيائية عن ثلاث تفاحات ، وأن حصانين يختلفان عن حصان واحد كظواهر مرئية وملموسة ـ لكن هل لنا أن نستدل من ذلك على أن الثنائية أو الثلاثية أشياء فيزيائية ؟ أن زوجا واحدا من الأحذية قد يكون بوصفه ظاهرة ملموسة ومرئية كائنين من الأحذية . ثمة اختلاف هنا فى العدد لا يقابله اختلاف فيزيائى ؛ ذلك لأن « اثنين » و « زوج واحد » ليسا نفس الشيء على الاطلاق ، كما يعتقد « مل » بصورة بالغة الشذوذ »[20] .

ينقد « فريجه » غلاة التجريبيين مشيرا إلى أن الأعداد الكبيرة تمثل دليلا واضحاً على أن الوقائع الفيزيائية لا تعد أساسا لأى تعريف عددى مثل قولنا (3 = 2 + 1) ، ما الوقائع الفيزيائية اللازمة لتعريف العدد 777864 ومن منا لديه المقدرة على مشاهدة مثل هذه الوقائع ؟! ، بل ما الوقائع التى تتطابق مع الأعداد 1 ، 0 ، ان سلمنا برأى التجريبيين ؟! لم يحدث قط أن رأى أحدنا أو لمس صفراً من الحصى ، ولا ندرى شيئا عن نمط التوزيع الذى يؤدى بنا إلى (1) . ومن ناحية ثانية فان القوانين العامة التى يستخدمها « مل » فى اشتقاق صيغ عددية من الأعداد التجريبية هى حقائق استقرائية يراها « فريجه » محل شك .

الخلاف ظاهر بين الاتجاهين ؛ الاتجاه التجريبى كما يمثله « مل » واتجاه « فريجه » الذى يأتى مطابقا ــ بهذا الصدد ــ للاتجاه الأفلاطونى ، فالأشياء المحسوسة سريعة الزوال ، شديدة التقلب ، تنأى عن الثبات والموضوعية اللازمة لتلك الكيانات التى يرمز لها علماء الرياضيات بعلامات محددة . اذ هذه الأشياء المحسوسة ليست سوى ظلال وانعكاسات لتلك الموضوعات الحقيقية ، وان الاستناد إلى الأولى فى التوصل إلى الثانية خطأ فاحش . ولو

(20) Frege, The Foundations, pp. 32-33.

سلمنا بما يقوله « مل » عن علم الحساب لأصبح كل شيء مشوشا وغير متميز[21] . ولنا عودة لمناقشة الطابع الأفلاطوني في فلسفة « فريجه » .

6 ــ سبل التقويم :

يذهب الجيل المعاصر من المفكرين والكتاب والمعلقين إلى أن « فريجه » لم يكن مجرد عالم رياضيات أو فيلسوف عابر ، وإنما جاء ليشكل علامة بارزة فى تاريخ العلم . واجهته مشكلات فلسفية وأخرى رياضية وكان عليه أن يقترح حلولا لها ، وكانت حلوله لا تنقصها الجرأة بل أن بعضها جاء بمثابة ثورة على مفاهيم وتصورات بالية فى الفلسفة والرياضيات معا ، ويعبر نشاطه العلمى طوال حياته عن رغبة فى التعديل وتقويم مارآه معوجا . وكان نهجه يماثل نهج كبار الفلاسفة والمفكرين ؛ نقد لآراء السابقين واقتراح حلول جديدة لمشكلات قديمة . وقد سلك عدة سبل للتقويم نعرض لبعضها فى إيجاز وسوف نلمس جانبا منها فى حديثنا عن نظريته فى الأعداد .

ــ النزعة النقدية :

تنصب نزعة « فريجه » النقدية ــ كما لاحظنا ــ على الآراء والمذاهب المعاصرة له عن طبيعة العدد ، ويركز فى نقده على فشل أصحاب هذه الآراء فى تلبية مطالب الموضوعية واليقين . وقد انتهى إلى أنه لا مجال للبحث فى النظريات الشكلانية على أساس أنها فشلت فى تلبية المطلب الأول ، واستبعد النظريات التجريبية لأنها فشلت فى تلبية المطلب الثانى ، كما استبعد النظريات السيكولوجية لأنها لا تلبى المطلبين معا . وقد كان رائد « فريجه » فى نقد المذاهب السابقة والمعاصرة له قراءة النصوص وتحليلها بدقة ، وبيان أوجه القصور فيها واقتراح ما يراه من حلول ان كان المذهب الذى يدرسه قابلا للتعديل ، أو ينصح بالتخلى عنه تماما .

---

(21) Jones, Op. Cit., p. 139.

— التحليل المنطقى :

حظى « فريجه » باعجاب أصحاب الاتجاه التحليلى ، ولم يأت هذا الاعجاب من فراغ فمطلبهما للوضوح واحد ، وتأكيدهما على الصرامة مشترك ، بالاضافة إلى اصرارهما معا على توضيح الأسس وتأمين قاعدة صلبة لأى نسق فكرى قبل السعى لتحقيق أى تقدم مهما كان ضئيلا . كان التحليل المنطقى أداة « فريجه » لتناول ما ساد عصره من مفاهيم وأفكار . وقد استخدم التحليل كمدخل لصياغة نظريته المنطقية وتم له ذلك على عدة مراحل : تحليل اللغة العادية والتمييز بينها وبين لغة رمزية — نصوغ بها أسس الرياضيات — هى اللغة العلمية الدقيقة التى لا ترتبط بعواطف أو مشاعر . ثم يضع فى مرحلة تالية تعريفات للأفكار الأساسية لنسقه المنطقى فى ضوء مجموعة من القواعد التى تحكم عملية التعريف ذاتها . ثم يقترح مجموعة القوانين الأساسية أو البديهيات بالاضافة إلى تحليله لكيفية التوصل للقوانين فى ضوء العلاقات المنطقية الأساسية . وكان النسق المنطقى كما رآه صورة مثلى ومعيارية للحكم على بقية الموضوعات المعرفية .

— الموضوعية :

حارب « فريجه » النزعة الذاتية السائدة فى عصره ، ورأى أن عنصرا سيكولوجيا قد تسرب إلى الفلسفة والمنطق بفعل ديكارت ولوك على اختلاف مشاربهما . وقد تشكك فى أن تنشأ معرفة ذات صبغة موضوعية فى اطار الاتجاهات السائدة حينئذ . وفيما يتعلق بالموضوعية فقد تحدث عن مستويين منها سعى إليهما معا : الأول الموضوعية بمعنى قريب من المعنى الكانطى أى ما كان موضع اتفاق بين الذوات (Intersubjective) ، ويرتبط بنواحى إبستمولوجية ويشكل رصيدا معرفيا فعليا للانسان . الثانى الموضوعية كخاصية أساسية لكيانات عالم مجاوز للتجربة الحسية ويعلو عليها ، وهذا العالم يحوى الأفكار والأعداد والقضايا وقيم الصدق .. الخ ، وبقدر ما يتعلق المعنى الأول بالابستمولوجيا يرتبط المعنى الثانى — بصورة أو بأخرى — بالأنطولوجيا ، وليس ثمة تناقض — كما سنلاحظ — عند فريجه من الجمع بينهما .

اصطناع الرموز :

استخدم « فريجه » رموزا من ابتكاره توخيا للدقة والصرامة . وكانت لغته الرمزية ضرورة للدقة فى التعبير والتكامل فيما يقيم من استدلالات . وقد إرتبطت نشأة الرموز لديه بمحاولة التمييز بين اللامعرفات والمعرفات من الأفكار المنطقية الأولية وما يتعلق بذلك من متغيرات وثوابت وصور القضايا ، وبيان القدرة على صياغة تعريفات للروابط المنطقية . كما عبرت الرموز بدقة ووضوح عن البديهيات وقوانين وقواعد الاستدلال . واستخدام الرموز بصفة عامة فى علم من العلوم يعبر بصدق عن الشوط الذى قطعه هذا العلم فى درب التقدم . إلا أننا نلاحظ أنه رغم اصطناع فريجه للرموز مما زاد فى مقدرته على التحليل ، رأى البعض فى لغته الرمزية صعوبة ظاهرة حالت دون إنتشار آرائه ونظرياته ، ومن هؤلاء « برتراند رسل » الذى يعترف بصعوبة جمة واجهته عند قراءته للجزء الأول من **القوانين الأساسية لعلم الحساب** للمرة الأولى[22] .

(22) Kneale, The Development of Logic, pp. 511-12.

الفصل الثالث

الأعـــداد

موضوع علم الحساب

الفصل الثالث

الأعـــداد

موضوع علم الحساب

كان أحد الفروض الأساسية التى تفرغ « فريجه » لاثباتها خلال كتبه وأبحاثه محاولة اثبات أن مصطلحات علم الحساب يمكن تعريفها بالرجوع إلى حدود ومصطلحات منطقية . وقد عرض لمبررات هذه المحاولة وعناصرها فى كتبه الأساسية : **أسس علم الحساب** ، **القوانين الأساسية لعلم الحساب** ، وعدة مقالات تتعلق بالأعداد .

أدرك « فريجه » العلاقة الوثيقة بين الرياضيات والمنطق ، ورأى أن نظرية الأعداد الطبيعية[1] التى تؤلف القاعدة الأساسية لعلم الحساب ما هى إلا امتداد للمنطق . فلنحاول فى هذا الفصل التحقق من ذلك بدراسة آراء « فريجه » عن العدد وأنواعه ، وفكرة المساواة العددية وعلاقة العدد ببعض الأفكار المنطقية كالتصور والمفهوم والماصدق ، ثم محاولة تعريف العدد فى اطار منطقى .

1 ــ العدد (مقدمة تاريخية) :

مرّ العدد مفهوما ورمزا بعدة مراحل تاريخية : كان الانسان القديم ــ فى المرحلة الأولى ــ ينظر للطبيعة بما تحويه من أشياء على أنها وحدة متكاملة وأنه جزء من هذه الوحدة . وفى مرحلة ثانية بدأ يدرك تميزه وتفرده ، وكرس هذا الادراك من خلال التملك والسيطرة وتصنيف الأشياء معتمدا على أوصافها ، ثم تعرف الانسان دون أن يشعر على العدد (1) ، وبدأ يعد الأشياء بتكرار الواحد (هذا واحد ، وهذا واحد ...) ، ولم يكن يعد : واحد اثنان ... ، وقد

---

(1) الأعداد الطبيعية هى بالتعريف 1 ، 2 ، 3 ، 4 ... وتتطابق مع الأعداد الصحيحة الموجبة .

عاصر هذا الادراك لدى الانسان حاجته إلى تكوين مجتمعات وحاجته بالتالى إلى أسلوب للتفاهم ونعني به اللغة . وفى مرحلة تالية بدأت فكرة مقابلة الأشياء ببعضها تفرض ذاتها بما تتضمنه من قدرة استدلالية ؛ فأصابع اليد اليمنى مثلا تقابل أصابع القدم (واحد ــ لواحد) . وفى مرحلة متأخرة نسبيا أدرك الانسان معنى التساوى وبدأ يبحث عما يشير به إلى مجموعات متساوية بمفهوم واحد ــ لواحد ، فاستخدم الترميز (أى ترميز الصفات للمجموعات المتساوية) ، وتطورت هذه الرموز التى تمثل الأعداد عبر العصور حتى أصبحت أكثر يسراً فى الكتابة ودلالة لما نشير إليه . ومن هنا يمكن أن نعرف العدد بصفة مبدئية وبشكل عام على أنه « الصفة المشتركة بين مجموعات متساوية وفق مبدأ التساوى واحد ــ لواحد »[2] . ما نخرج به من هذه الفقرة التمهيدية هو أن دراسة المجموعات وفكرة التساوى ، وهما من الأساليب التى تعرف بها الانسان عبر تطوره على العدد ، يشكلان أساس الرياضيات المعاصرة .

2 ــ معنى العدد :

لم تعالج فكرة العدد بدقة فى ضوء أسسها الفلسفية إلا فى نهاية القرن التاسع عشر وبدايات القرن العشرين بمبادرة من « فريجه » . وقد رأى أنه لكى نحدد معنى العدد يجب أن نميز أولا بين العدد وبين الكثرة ، فالكثرة ليست العدد بمعناه الرياضى المجرد ، ذلك أن قولنا بخماس أو سداس أو سباع من الناس أو من الأشياء يشير إلى كثرة ، وليس بمثابة أمثلة على العدد ، وإنما نقول أن 5 ، 6 ، 7 أمثلة على الأعداد . أن أى عدد معطى يختلف تماما عن الكثرة ــ أو التعدد ــ التى تتكون من وحدات قدرها هذا العدد ، فالعدد ثلاثة ليس هو مجموع أضلاع أى مثلث ، والعدد أربعة ليس بذاته مجموع أضلاع المربع أو المستطيل ، ومن ثم ينبغى علينا أن نقيم تمييزا دقيقا بين العدد (9) وأى تساع من الأشياء التى نشاهدها فى العالم الخارجى . ومعنى ذلك أنه لا يمكن تعريف

(2) فوزى مصطفى دناد وآخرون [1984] « موسوعة الكويت العلمية » الرياضيات مؤسسة الكويت للتقدم العلمى ــ الكويت الجزء الثالث ، مادة : عدد ، ص 740 .

الأعداد بالرجوع إلى تصورات تجريبية ، مثل قولنا أن 5 هو العدد الذى ينتمى إلى تصور « قارة » [على اعتبار أن عدد القارات خمسة] ، أو ينتمى إلى تصور « أصابع اليد » ، ومثل قولنا أن 12 هو العدد الذى ينتمى إلى تصور [حوارى] [عدد حوارى المسيح] . أن الخلط بين معنى العدد والكثرة يعنى التسليم بتصورات تجريبية لا تتسق مع وجود سلسلة الأعداد اللانهائية التى تستخدم فى الرياضيات المتقدمة[3] .

3 ــ المساواة العددية :

يبدأ « فريجه » دراسته للأعداد فى اطار تحديده لمعنى الهوية [التطابق العددى أو المساواة] بين مفردات تصورين أو ما ينطوى تحت كل منهما من ما صدقات . والأعداد محل الدراسة هنا هى الأعداد الطبيعية التى تؤلف أعضاء نهائية لمجموع الأعداد الأصلية[4] . وتتضح الفكرة الأساسية لتصور الأعداد الأصلية من التعبير « يساوى فى عدده » Just as many as ، وهذا يعنى لدى « فريجه » أنه قبل أن ننهمك فى اعداد الرد على السؤال : كم عدد ... ؟ ، لابد أن تكون فكرة المساواة أو المماثلة العددية واضحة فى ذهننا ، ويزيد « فريجه » فكرة المساواة توضيحا بأمثلة ذات طابع برهانى[5] :

ــ يمكن القول بوجود عدد من الأشياء تنتمى لأحد الأنواع ، تناظر تماما أشياء أخرى لنوع ثان ، دون معرفة عدد كل نوع منهما [ندرك وجود أطباق فوق المنضدة بقدر السكاكين ، ان كان كل طبق يقابله سكين . وكذلك يصبح عدد الرجال هو نفس عدد النساء ، ان كان جميع الرجال وجميع النساء متزوجون ، وفى مجتمع لا يسمح بتعدد الزوجات] .

ــ وأن تكون أى اجابة لسؤال من نوع : كم عدد التفاحات فى هذا الصندوق ؟ يعادل قولنا « يساوى فى عدده [أشياء] موجودة من نوع

(3) Frege, The Foundations, pp. 87-90.

(4) نقول عن مجموعتين أن لهما نفس العدد الأصلى Cardinal ، ان كان بينهما تقابل يبرزه تكافؤ .

(5) Dummett, M., "Frege" in Encyclopedia of philosophy, Vol. 3, p. 234.

قياسى » . [بمعنى أنه ان أحصينا عدد حبات التفاح وكانت ست ، فانه يوجد بالضرورة ما يساويها من أرقام من 1 حتى 6] .

كان هدف « فريجه » أن يوضح المقصود من عبارة نقول فيها : « العدد الذى ينتمى إلى التصور F هو نفسه العدد الذى ينتمى إلى التصور G » ، دون أن نستخدم هذه الطريقة فى التعبير . لذلك راح يعمل بعون من فكرة « علاقة ارتباط واحد بواحد » التى يمكن أن تنشأ بين تصورين أو فئتين F ، G إذا قامت بينهما علاقة حمل أو انطواء ϕ وذلك فى الحالات[6] :

ا — أن يكون لكل موضوع أو شيء ينطوى تحت التصور F علاقة ارتباط بشيء يقع تحت التصور G .

ب — أن يكون لكل شيء ينطوى تحت التصور G شيء مماثل منطوٍ تحت التصور F وبينهما العلاقة ϕ .

حـ — فى حالة وجود X ، Y ، Z ، ان قامت العلاقة ϕ (واحد بواحد) بين X ، Y وبين X ، Z ؛ فان Y يساوى Z .

د — فى حالة وجود X ، Y ، Z ، ان قامت العلاقة ϕ بين X ، Y معا وبين Z ، فان X يساوى Y .

ويمكن اشتقاق قواعد أخرى على نفس الوتيرة .

ويلاحظ أن لعلاقة « واحد بواحد » التى تنشأ بين التصورات أو الفئات ثلاث خصائص ؛ الأولى : **الانعكاس** ، بمعنى أن أى فئة تماثل ذاتها ، أى توجد علاقة الواحد بواحد (التطابق) بينها وبين نفسها . إذا كانت F فئة فإنها تماثل ذاتها . الخاصية الثانية : **التماثل** ، بمعنى أنه ان نشأت هذه العلاقة بين F ، G كفئات ، فانها تنشأ أيضا بين G ، F . وتتميز ثالثا بخاصية **التعدى** ، ان كان الفئة F تماثل G ، والفئة G تماثل H ، فان الفئة F تماثل الفئة H بالتعدى . ومن المعروف أن « بيانو » توصل إلى نفس هذه الخصائص وأشار إلى أنه عندما تقوم علاقة بين حدين ، فان لهما خاصية مشتركة تنعكس عليهما معا ، وهذه

6) Frege, Op. Cit., pp. 83-6.

الخاصية المشتركة هى عددهما فى نظره ، وما يراه « بيانو » هنا هو أساس تعريف العدد بالتجريد[7] . فهل سار « فريجه » على درب « بيانو » أم طور فكرته عن الأعداد ؟ لنواصل تناول « فريجه » لفكرة المساواة :

أقام « فريجه » ــ من القواعد السابقة ــ بنية ثلاثة تعريفات هى[8] :

ا ــ إذا كان لدينا التصور F والتصور G ، فانهما يتماثلان من الناحية العددية ــ بمعنى التساوى ــ ان وجدت علاقة واحد بواحد تربط بين المفردات التى تنتمى إلى التصور F بالمفردات التى تنتمى إلى التصور G .

ب ــ العدد الذى ينتمى إلى التصور F هو ما صدق التعبير : « يماثل عدديا التصور F) .

حـ ــ يقصد بقولنا « ں عدد » أن تساوى قولنا : « يوجد تصور بحيث يكون (ں) عددا ينتمى إليه .

ونظن للوهلة الأولى أن توخى البساطة والنظام كان يقتضى أن نعكس ترتيب هذه التعريفات حتى تصبح العلاقة فيما بينها منطقية ، ولكن « وليم نيل » يقدم تفسيرا مقبولا لهذا السياق يرد فيه كل تعريف إلى التعريف الذى يليه[9] . وبيان ذلك أن « فريجه » يقصد بالعبارة « متماثلان عدديا » التى ترد فى التعريف الأول أن تضفى التماثل أو المطابقة بين الأعداد التى تنتمى إلى تصورات وتلك التصورات التى تنطبق عليها ، لكن يظل معنى العبارة « عدد ينتمى إلى تصور » بلا تحديد حتى نصل إلى التعريف الثانى . وعلينا أن ننظر إلى التعبير « متماثلان عدديا » على أنه يتكامل مع المعنى الذى يضفيه عليه التعريف الأول[10] . أما لو نظرنا فى التعريف الثانى لوجدنا أن العبارة « العدد

(7) رسل : **أصول الرياضيات** ، الجزء الثانى من الترجمة العربية ، ص : 11 .

(8) Frege, **The Foundations**, p. 87.

(9) Kneale, W. & M., **The** Development of Logic, p. 460

(10) كأن « وليم نيل » يطبق هنا أحد المبادىء الشهيرة التى اقترحها « فريجه » فى مقدمة كتابه **أسس علم الحساب** ، ونعنى به مبدأ السياق « ضرورة البحث عن دلالة الألفاظ فى نطاق القضية التى تحتويها » .

الذى ينتمى إلى التصور F » يقصد بها استخدام عادى للفظ « عدد » حتى يتم تعريفها فى التعريف الثالث . ومعنى ذلك أن التعريف الثانى هو بمثابة تفسير لاستعمال العبارة « عدد ينتمى إلى التصور F بأكمله » ، بينما يدور التعريف الثالث حول كلمة عدد ذاتها .

ونفهم من ذلك أن « فريجه » قد اتخذ طريقة تنازلية فى التعريف ، فلا يمكن التحدث عن العدد إلا فى ضوء أنه ينتمى إلى تصور ، والحديث عن تصور لا يكتمل إلا فى ضوء تصور آخر ، والهوية أو التماثل بين ما صدقات تصورين هو نقطة منطقية يمكن أن نبدأ منها دراسة الأعداد وتعريفها ، وتلك علامة على براعة « فريجه » فى التحليل .

4 ـــ العدد بين المفهوم والماصدق :

قبل أن نعرض لتعريفات « فريجه » للأعداد نعرض بعض الأسس المنطقية التى استند إليها فى صياغة نظريته عن الأعداد ، ومنها بعض الأفكار المنطقية مثل : المفهوم ، الماصدق ، التصور ، لأن تحديد موقع العدد من هذه الأفكار يعد أمرا هاما ، حتى لو بدا للقارىء أننا نعيد عرض أفكار الفصل السابق ، والحقيقة أن ليس ثمة تكرار وانما تأكيد للجانب المنطقى لفكرة درسناها سابقا من جانب آخر .

أما عن علاقة العدد بالمفهوم والماصدق ، فان بيان هذه العلاقة مرتبط بطريقة تعريفنا للأعداد . ينصح « فريجه » ـــ مناوئا الاتجاه التجريبى ـــ بألا نلجأ إلى إستقراء جميع الأفراد الداخلة فى ما صدق شىء ما لكى نعرّفه ، لأنه لو أفلحنا فى ذلك تجاه الفئات متناهية العدد ، حيث يمكن عدّ الأفراد التى تكوّن هذا العدد ، فمن المستحيل تطبيقه عندما يكون العدد لا متناهيا ولا يمكن لنا حصره . لابد من تعريف العدد بالمفهوم أى بخاصيّة مشتركة بين الأفراد بفضلها تكوّن فئة . وهذا يعنى أننا إن علمنا فئة أحد التصورات فان هناك عددا من الأفراد تنطبق عليها فئة هذا التصور ، وحينئذ يمكن اعتبار هذا العدد خاصية من خصائص تلك الفئة[11] .

(11) رسل : **أصول الرياضيات** : الجزء الثانى من الترجمة العربية ص 9 ، 10 وأيضا :
عبد الرحمن بدوى : مناهج البحث العلمى ، ص 58 .

إن القول بتعريف العدد بالمفهوم يحل لنا مشكلة اللانهاية ، حيث لا حاجة إلى عدّ الماصدقات . ويقوم هذا الرأى استنادا إلى فكرة « الجميع » ، فجميع الناس — مثلا — تدل على الناس مجتمعين بطريقة خاصة ، وبهذه الدلالة فلهم عدد ، وكذلك « جميع الأعداد » أو « جميع النقط » تدل على الأعداد أو النقط مجتمعة بطريقة خاصة ، وباجتماع الأعداد أو النقط هكذا فلها عدد . فالأعداد اذن يجب أن تعتبر خواص للفئات . لكن حذار أن نذهب إلى أن العدد هو المفهوم ذاته ، وحذار أن نذهب إلى أن العدد هو تصور ، فهذا عكس ما يذهب إليه « فريجه » تماما .

5 — **العدد والتصور :**

نفى « فريجه » أن يكون العدد شيئا ، ونفى عنه كذلك أن يكون تصورا من المستوى الأول أو المستوى الثانى ، كما فهم بعض الكتاب[12] . وينكر عليه « وليم نيل » هذا النفى قائلا :

« إذا كان من الأفضل أن نقول — كما يذهب فريجه — أن الأعداد تتعلق بالتصورات ، فلم لا نوحد بين الأعداد وتصورات المستوى الثانى »[13] .

ويبرر « فريجه » موقفه بهذا الصدد بأننا إذا نظرنا — على سبيل المثال — فى القضية « العدد صفر ينطوى تحت التصور F » ، فإن الصفر يعد جزءاً فقط من المحمول أو عنصرا فيه [إذا افترضنا أن التصور F أمر واقعى] . ولهذا يتجنب أن يطلق على عدد كالصفر أو الواحد أو الاثنين أنه تصور ، لأن كل عدد منها يعد مجرد عنصر فيما نقرره[14] .

(12) يقول د . محمد ثابت الفندى مفسرا موقف « فريجه » : « فالأعداد ليست تصورات مباشرة أو أوائل وانما هى تصورات من درجة ثانية عن تصورات مباشرة ، هى لصفات مشتركة بين تصورات أوائل ، إذ يجب أن تكون هناك أولا تصورات الأشياء المتفرقة والمجتمعة فى فئات ، لكى تكون هناك بعد ذلك تصورات عددية للفئات » . فلسفة الرياضة ، ص 147 . ويبدو لنا أن « فريجه » قد تجاوز هذا الموقف وبخاصة فى أعماله المتأخرة .

(13) Kneale, Op. Cit., p. 458.

(14) Frege, The Foundations, p. 57.

ويزيد « فريجه » الأمر بيانا فيما يتعلق بما يقصده من التصور وعلاقته بما يندرج تحته من أشياء بما فيها الأعداد ، قبل أن يدلف إلى تعريف الأعداد . عندما نتكلم عن الصفات المميزة التى نطلقها على تصور ما ، فإننا ينبغى ألا نقصد بها الخواص التى تؤلف هذا التصور . فتلك الخواص صفات للأشياء التى تندرج تحته وليست صفات للتصور ذاته .

وبناء على ذلك فإن خاصية مثل « قائم الزاوية » ليست صفة للتصور « مثلث قائم الزاوية » ، بينما القضية التى تقول بعدم وجود « مثلث قائم الزاوية ومتساوى الأضلاع » فى نفس الوقت تعبر عن خاصية للتصور : « مثلث قائم الزاوية ومتساوى الأضلاع » . وهى تشير إلى عدد عدمى لا وجود له ، أو صنف فارغ . وهنا يكون الوجود مساويا للعدد ويبنى « فريجه » قوله بما بعده مقولة أساسية لتعريف الأعداد : « إن اثبات الوجود — ليس إلا — انكار عدد عدمى »[15]

والوجود الذى يتحدث عنه « فريجه » ليس وجود التصورات ، وإنما وجود ما يندرج تحتها . ومن ثم فإن خاصية التصور أو صفته ينبغى أن يكون لها مثال أو عدة أمثلة تنطبق عليها هذه الصفة . ولهذا فان « فريجه » عندما رفض أن يعتبر الأعداد تصورات من المستوى الثانى . فانه كان مدفوعا إلى ذلك ، بفكرة فحواها أن للأعداد وجودا ذاتيا يعد مستحيلا بالنسبة للتصورات »[16] .

6 — عملية العدّ بين المظهر النفسى والمنطق :

لا نتعرض لجديد فى هذه النقطة ، بقدر ما نعيد نقاط سبق عرضها متفرقة ، نجمعها فى اطار منطقى بعيد عن المظاهر النفسانية والتجريبية . فقد رأى « فريجه » فى الأعداد كيانات موضوعية مستقلة عن حواس الأفراد ، وان كنا ندركها بالحس — أثناء القيام بالعدّ على الأقل — فانها لا تتغير بتغير تصور الفرد لها ، كما أنها ليست أمورا ذاتية تشير إلى تصورات أو ذكريات وانطباعات

(15) Ibid., p. 53.

(16) Kneale, Op. Cit., p. 459.

تعتمد فى صحتها على من يتصورها . وإذا كان أصحاب الاتجاهات التجريبية والنفسية يرون أن الأعداد المتناهية جاءت نتيجة لعملية العدّ ، أى نتيجة التركيب التى يضفون عليها مظهرا نفسيا ، فان هذا المظهر بعيد تماما عن نظرية الحساب .

حقيقة الأمر أن عملية العد تستند إلى أساس (أو عملية) منطقى ؛ حين نقول : واحد ، اثنين ، ثلاث ... الخ نقيم بالضرورة علاقة واحد بواحد بين الأعداد المستخدمة فى العد وبين الأشياء المعدودة . نعنى بقولنا « واحد ، اثنين ، ثلاثة » أن الأشياء المشار إليها بهذه الأعداد هى نظائرها بالنسبة إلى العلاقة الموجودة فى أذهاننا . وهكذا نربط بين فئة من الأشياء وبين فئة الأعداد ، وتشتمل فئة الأعداد على جميع الأعداد من (1) إلى عدد وليكن (ن) . وما نستدله مباشرة من هذا الارتباط هو أن عدد الأشياء هو نفس عدد الأعداد من (1) إلى (ن) .

وتتسق العبارة الأخيرة مع ما توصلنا إليه عند دراسة معنى المساواة عند « فريجه » وهو معنى منطقى يعبر عن الهوية كما سنرى فى الفصل القادم . عملية العد إذن تستند إلى أساس منطقى ولا تقوم على مظهر نفسى أو آخر تجريبى .

7 ــ قواعد التعريف :

تساءل « فريجه » فى مقدمة كتابه أسس علم الحساب : ما العدد واحد ؟ وهو سؤال طالما رآه علماء الرياضيات ــ حتى عهده ــ بسيطا ، فقد كان الشائع فى الماضى ــ بين القائلين بامكان تعريف الأعداد ــ أن يستثنى العدد (1) من التعريف ، وأن تعرَّف به باقى الأعداد . إلا أن « فريجه » عندما طرح هذا السؤال كان يقصد من ورائه معارضة السابقين عليه ومعاصريه ، فى تصورهم لطبيعة الأعداد وتعريفها . كان فريجه ينشد طرح طريقة أو منهج جديد لتناول الموضوع : بدأ بمناقشة آراء الكتاب حول طبيعة قضايا علم الحساب ليصل إلى نتيجة حاسمة ، هى أن قوانين علم الحساب ليست حقائق استقرائية ، كما أنها ليست قضايا تركيبية بل تحليلية . ثم ناقش فكرة العدد

وارتباطها بفكرة الفئة ، لينتقل إلى محاولة تعريف العدد مستعينا بتصورات منطقية . وهل فكرة التعريف ذاتها سوى فكرة منطقية . وإذا كنا نسلم فى المنطق ببعض التصورات دون تعريف ، فاننا نستخدمها فى تعريف بقية قضايا النسق .

ولما كانت محاولة « فريجه » تتمثل فى محاولة رد علم الحساب إلى أصول منطقية فلابد من الامتثال لمجموعة من القواعد والشروط خاصة باقامة التعريفات . وقد صاغ « فريجه » هذه القواعد فى كتابه **القوانين الأساسية** بجزئيه الأول والثانى كما يلى[17] :

- هناك قاعدة تقول : « لكل اسم معنى » ، ولما كان الاسم المعرَّف يكتسب معناه من الحد المعرِّف له ، فلابد أن يحتوى الأخير على أسماء ذات معنى محدد وواضح ، حتى يتسنى لنا فهم الاسم أو الحد المعرِّف بعد القيام بتعريفه .
- ينبغى ألا نعرِّف الرمز أو الحد بأكثر من تعريف ، لأن وجود تعريفات مختلفة أو متباينة المعنى لرمز واحد يوقعنا فى لبس وغموض ، فقد يحمل الرمز تعريفا فى سياق معين ، ويحمل تعريفا آخر فى سياق مختلف عن الأول ، فلا نحقق للنسق إتساقا . أن فريجه ينشد بذلك ما يطلق عليه مبدأ غاية الكمال[18] Principle of Completeness ، الذى يتحقق مع وضع تعريف محدد للزمز الواحد أينما وجد .
- بساطة التعبير المعرَّف ، أو ما يسميه « فريجه » مبدأ البساطة[19] Principle of Simplicity in the Expression defined . بمعنى ألا يحتوى التعبير على عديد من الرموز حتى لا نضطر لأن نضع تعريفا لكل رمز على حدة ،

---

(17) Frege, **Grundgesteze der Arithmetik**, Vol. II, Sections 56-67 in Geach & Black, Op. Cit., as Frege On Definitions 1 pp. 159-181.

(18) Ibid., p. 159.

(19) Ibid., pp. 170-171.

فقد تتداخل التعريفات مع كثرتها أو تتناقض فيما بينها ، وقد تتناقض مجتمعة مع تعريفات فرادى فى نفس النسق . وهنا يقترح « فريجه » أن يأخذ التعريف شكل المعادلة التى تعبر عن المساواة بين تعبيرين أو كميتين ، وان جاء التعريف غير ذلك فانه يشبه معادلة غير محددة تحتوى على أكثر من متغير ولها عدد غير محدد من الحلول ؛ مما يتنافى مع الهدف من وضع التعريفات .

- ان التعريف الدقيق للتعبير أو الاسم لا يتناول مبنى المعرَّف فى سياقه ثانية ، بمعنى ألا نذكر فى التعريف نفس الاسم المعرف من جديد ، والا وقعنا فى دور يأباه المنطق ، ونصبح مثل من عرف الماء بعد الجهد بالماء .

جاءت هذه المبادىء متسقة مع برنامج « فريجه » فى تطوير المنطق لكى يصبح معينا للرياضيات ، كما جاءت تعبيرا عن اهتمامه باللغة الرمزية التى جعلها بالاضافة إلى بعض التصورات المنطقية أساسا لتعريف الأعداد .

8 ـ تعريف العدد :

اتفق « فريجه » مع « ليبنتز » و « مل » وآخرين على أن تعريف الأعداد الطبيعية مما يزيد عن الواحد يتم بالرجوع إلى الأعداد السابقة عليها ، مثل قولنا : "2 = 1 + 1" ، "3 = 2 + 1" . إلا أن « فريجه » لاحظ أن مثل هذه التعريفات تظل مبتسرة مادام كل من العدد 1 وفكرة الاضافة بالواحد بلا تعريف . وكانت هذه الملاحظة احدى نقاط بدء الاصلاح الذى اقترحه لتطوير علم الحساب بدراسة التصور العام للعدد الطبيعى . وقد عانى بهذا الصدد من الغموض الذى اكتنف أعمال أسلافه من رياضيين عظام من « اقليدس » حتى « كانتور » . وقد عبر عن موقفه من نظريات هؤلاء بما يفيد اختلافه عنهم ، فالعدد ليس تجريدا وليس صفة وليس شيئا ، كما أنه ليس انطباعا ذاتيا . يقول « فريجه » :

« العدد ليس تجريدا ينشأ عن النظر فى الأشياء بالطريقة التى نجرد بها اللون والوزن والصلابة ، كما أنه ليس صفة لما تكون عليه الأشياء ، لكننا نتحدث عن الأعداد ، فما طبيعتها إذن ؟ سؤال ظل بلا إجابة مقنعة ...

إن العدد ليس شيئاً فيزيائيا ، كما أنه ليس شيئا ذاتيا [فكرة ذاتية أو انطباع] ، والعدد كذلك ليس نتيجة اضافة شىء إلى شىء آخر »[20] .

ان طبقنا مبادىء التعريف التى أشرنا إليها للتو ، لتأكدنا أن هذا القول من جانب « فريجه » ليس تعريفا للعدد بالمعنى الدقيق ، وانما هو نفى صفات وخصائص عن الأعداد التصقت بها فى المذاهب السابقة . وهى صفات وخصائص لا تقوم بها الأعداد فى رأى « فريجه » . لكننا نحاول أن نعرض لتعريف « فريجه » للأعداد فى ضوء النقاط السابقة والتى آثرنا جمعها من فلسفة « فريجه » دون غيرها لأنها تشكل الأسس التى أقام عليها تعريفه للعدد ، وأعنى بها : معنى العدد ، المساواة العددية ، العدد والمفهوم ، العدد والتصور ، مبادىء التعريف .

إذن : ما الأعداد ؟

أنها تشير إلى تصورات [وليست تصورا][21] ، ولا تشير إلى أفراد ، هذا من ناحية . ومن ناحية ثانية نجد أن العدد الأصلى لمجموعة معينة من الحدود هو الفئة التى تمثل كل المجموعات « المماثلة » لتلك الفئة أو المجموعة المعينة . ويقصد بالتماثل هنا بين مجموعتين علاقة واحد بواحد كما أشرنا إليها آنفا . العدد الأصلى فئة تضم جميع تلك الفئات المماثلة لفئة معينة[22] .

---

(20) Frege, The Foundations, p. 58.

(21) أشرنا عند التعريف بمقالة « فريجه » « التصور والموضوع » إلى أن التصور يشار إليه بكلمة نستخدمها فى موضع « المحمول » فى القضية ، بينما « الموضوع » يمكن أن نطلق عليه « اسم علم » ويقال ليندرج تحت تصور أو يوصف بأحد التصورات .

(22) رسل [1918] : « فلسفة الذرية المنطقية » ، ترجمة عزمى اسلام [1987] منشورة بكتاب زكى نجيب محمود . [مطبوعات جامعة الكويت] ص : 355 .

1-8 تعريف الصفر : لنطبق هذا المفهوم على الأعداد ، ولنبدأ بالصفر ، « الصفر هو فئة الفئات التى لها حد وحيد هو الفئة الصفرية » . ومعنى ذلك أن ثمة فئة ذات عضو واحد يتمثل فى فئة الصفر نفسه ، والفئات من هذا النوع لا أفراد لها . وهنا نعجل بالتمييز بين عدد الفئةن وبين عدد الأفراد التى تنطوى عليها تلك الفئة ؛ عدد الفئة هو واحد بمعنى أن هناك فئة واحدة عضوها الوحيد هو فئة الصفر (وفئة الصفر ذاتها بلا أعضاء) . وفى ذلك تفسير لقولنا أن : الصفر عدد لا يساوى ذاته أو لا يتطابق مع ذاته ؛ لأنه واحد ان نظرنا إليه كفئة فئات ، ولأنه لا ينطوى على شيء — فى نفس الوقت — من ناحية الأفراد المنطوية تحت احدى هذه الفئات — ومن ثم كان تعريف « فريجه » للصفر : « أنه العدد الذى ينتمى إلى التصور « ليس مساويا لذاته »[23] . ولنضرب مثالا : عندما نقول « لكوكب الزهرة صفر من الأقمار » ، فان قولنا يعنى ببساطة أنه لا يوجد أى تابع (قمر) لكوكب الزهرة ، وما قمنا به هو تعيين صفة للتصور « قمر كوكب الزهرة » الذى لا يتضمن شيئا لينطوى تحته »[24] .

لكن أليس ثمة مظهر للدور فى تعريف « فريجه » للصفر بهذه الطريقة ؛ حين يذهب إلى أن الصفر ينطوى تحت تصور ما ، بحيث لا يندرج تحت هذا التصور أى شيء ، وتبدو أداة النفى « لا » كما لو كانت بديلا للعدد « صفر » . لكن يتضح الأمر ونتفادى الدور بالقول : « ان العدد صفر ينتمى إلى التصور (F) بشرط — أنه فى كل حالات X — لا ينطوى X تحت (F) » . ومعنى ذلك أن « فريجه » يحدثنا عن فئة فارغة لا تحتوى شيئا[25] .

ومن الملاحظ أن « فريجه » أعطى لفكرة المساواة — وهى أساس من أسس تعريف العدد — أهمية عند مناقشته لتعريف الصفر ، على أساس أنه عدد هو

(23) Frege, The Foundations, p. 87.

(24) Kneale, Op. Cit., p. 456.

(25) ظهرت فكرة الفئة الفارغة Null Class فى الجهاز الرمزى لمنطق « جورج بول » وتعنى الفئة الصفرية التى ليس لها أعضاء ، ولكن نلاحظ أن تعريف الصفر عند « فريجه » يحتوى على تطوير لفكرة « بول » ، ولا يتوقف عندها حيث يجعل من هذا التعريف أساسا لتعريف الأعداد التالية .

الآخر . لنعرض لجانب مما قاله « فريجه » بهذا الصدد . من الواضح أن الصفر عدد ينطبق على أى تصور ليس له ما صدقات ، وتصور من هذا النوع « ليس مساويا لذاته » ، ولما كنا قد سلمنا أن كل شيء يساوى ذاته طبقا للهوية والمساواة ؛ فلا شيء يندرج تحت هذا التصور . معنى ذلك أن نقول عن الصفر أنه يأتى كما صدق لتصور { مساوٍ عدديا للتصور « ليس مساويا لذاته » } . قديرى البعض أن هذا التصور ينطوى على تناقض ، وقد رأى « فريجه » ـــ فى هذه الحالة بالذات ـــ أن من الخطأ أن نرفض تصورات متناقضة تناقضا ذاتيا مثل هذا التصور ، بل لنا مطلق الحرية فى تناولها مادمنا لا نفترض أنها تنطوى على أشياء . وفى حقيقة الأمر فإنه من الصعوبة بمكان أن نبرهن أو نثبت أن تصورا يناقض نفسه تناقضا ذاتيا ، اننا لا نتعامل فى الحقيقة مع تصورات فارغة[26] .

ومن ناحية ثانية ، فقد أشرنا فى موضع سابق إلى الحالات التى تنشأ فيها المساواة العددية بين تصورين ، والشروط والقواعد التى تحدد ذلك . وعرفنا أن المساواة تنشأ بصفة عامة بين تصورين (G ، F) ان كان لهما نفس الأعضاء ، أو تنشأ بين أعضاء كل منهما علاقة واحد لواحد . لكن ماهو الحال ان كان لا يندرج تحت أى من التصورين شيء ؟

يوضح « فريجه » أن أى تصورين لا يندرج تحتهما شيء يتساويان عدديا . ولبيان ذلك نفترض أن هذين التصورين هما F ، G والمطلوب منا هو أن نقيم بين أعضائهما علاقة واحد لواحد ، لكن لما كانت F ، G تصورات فارغة فليس ثمة ما يندرج تحت أى منهما . وكان الأمر أكثر سهولة إن كان أحد التصورين فارغا والآخر غير ذلك حتى نثبت أنهما لا يتساويان . ولما كان المطلوب إثبات أنهما [G ، F] متساويان ؛ فمعنى ذلك أن يقابل كل موضوع يندرج تحت G ما يماثله مندرجا تحت F . ولا يوجد فى الواقع ما يندرج تحت أى منهما سوى ما صدق واحد (الفئة الصفرية) . اذن الحد الوحيد الذى

(26) Frege, The **Foundations**, p. 87, and **Basic Laws**, Vol. 1, p. 100.

يندرج تحت F هو نفس الحد الذى يندرج تحت G ، ومن ثم فهما متساويان عدديا .

2-8 تعريف الاضافة : أشرنا فى مدخل هذا الفصيل (8) إلى ملاحظة « فريجه » عن اغفال من سبقه من علماء الرياضيات تعريف العدد (1) ومفهوم الاضافة . وبعد أن تناولنا تعريف الصفر وما يتعلق به ، نرى أنه من المناسب أن نعرض لتعريف الاضافة عند « فريجه » قبل تعريف العدد (1) .

نظر « فريجه » فى متسلسلة الأعداد ، وأراد أن يبحث فى العلاقة بين أى عضو فيها والعدد التالى له مباشرة ، مثل قولنا : (3) تال لـ (2) على سبيل المثال . واقترح بصدد بيان هذه العلاقة أن نعرّف الجملة :

« العدد n يعقب مباشرة العدد m »

على أنها تعنى :

« يوجد تصور (F) ، وموضوع يندرج تحته (X) ، بحيث أن العدد الذى ينتمى إلى التصور (F) هو (n) ، والعدد الذى ينتمى إلى التصور ' يندرج تحت (F) لكنه لا يساوى (X)' ، هو (m) » .

ونفسر هذه العبارة كما يلى :

لنفترض أن (m) و (n) أعداد ، وأن (n) يعقب (m) مباشرة ، أو التالى له . ومادام (n) عدد ، فانه ما صدق للتصور « مساوٍ ــ عدديا ــ للتصور (F) بالنسبة لما هو (F) »[27] . ومادام (n) أكبر من العدد الآخر (m) ؛ فإن (n) لا يساوى الصفر ، وكذلك ينبغى أن يكون التصور (F) على هيئة بحيث يندرج تحته شيء واحد على الأقل . ليكن (X) هو ما يندرج تحت (F) .

---

(27) أحد تعريفات العدد فى صورة اصطلاحية قد نعود إليها أكثر من مرة . ونستخدم هنا حروفا أبجدية انجليزية للاشارة إلى التصورات وما يندرج تحتها أو ينتمى إليها ، حتى لا تختلط الحروف العربية بالسياق فى حالة استخدامها .

لنتأمل الآن التصور « يندرج تحت (F) لكنه لا يساوى (X) » . من الواضح أنه يندرج تحت هذا التصور كل الأشياء التى تندرج تحت (F) اللهم الا (X) . وبناء عليه فان العدد الذى ينتمى إلى التصور « يندرج تحت (F) لكنه لا يساوى (X) » هو ما صدق للتصور « مساوٍ ــ عدديا ــ للتصور ' يندرج تحت التصور (F) لكنه لا يساوى (X)' » . انه العدد الذى يتعلق بكل تصور له موضوع واحد يندرج تحته أقل من ما صدق أى تصور مساوٍ ــ عدديا ــ للتصور (F) . ومن الواضح أنه العدد الذى نود أن نعتبره سلفا مباشرا لـ (n) ، أى أنه العدد (m) . (m) هو سلف (n) المباشر ، والاضافة هنا بالواحد . فما تعريف (1) .

3-8 تعريف العدد (1) : بدأ « فريجه » بتعريف الصفر ، ثم عرّف العلاقة التى تنشأ بين الأعداد عندما يتلو الواحد منها الآخر . ومن هذين التعريفين يسهل علينا تقديم تعريفات لكل الأعداد . ولنبدأ بالعدد (1) :

يندرج تحت التصور « مطابق للصفر » ــ أو مساوٍ له ــ موضوع واحد ، انه العدد صفر (0) ، والواضح أن العدد الذى ينتمى إلى هذا التصور هو العدد واحد (1) . ولبيان ذلك علينا أن نعيد النظر فى العبارة التى عرفنا بها الاضافة مع وضع تعديلات مناسبة ؛ بحيث يحل فيها التصور « مطابق للصفر » محل التصور "F" ، ويحل « الصفر » محل "X" ، ثم نقرأ العبارة المشار إليها كما يلى :

« يوجد تصور « مطابق للصفر » ، وموضوع يندرج تحته هو « الصفر » ، بحيث أن العدد الذى ينتمى إلى التصور « مطابق للصفر » هو (n) ، والعدد الذى ينتمى إلى التصور « يندرج تحت التصور 'مطابق للصفر لكنه لا يساوى صفرا' هو (m) »[28] .

لكن ما الأعداد (m) ، (n) ؟

(28) Currie Frege, An Introduction to his Philosophy, p. 50.

(m) عدد ينتمى إلى التصور : « يندرج تحت التصور 'مطابق للصفر' لكنه ليس مساويا للصفر ، ومن الواضح أن لا شيء يندرج تحت هذا التصور ، وأن العدد الذى ينتمى إليه هو الصفر ، كعدد عدمى nought Number[29] .

(n) عدد ينتمى إلى التصور : « مطابق للصفر » الذى يندرج تحته شيء واحد فقط (هو العدد صفر) ، وبالتالى فإن (n) هو العدد واحد .

ومادامت العبارة التعريفية السابقة تعنى أن « n تتبع مباشرة m » ، فإن الواحد (1) هو ما يتبع الصفر (O) مباشرة . وهو ما نريد اثباته . إذن تعريف العدد (1) هو العدد الذى ينتمى إلى التصور « مساوٍ للصفر » أو يتطابق مع الصفر » .

أقام « فريجه » تعريفاته على أساس تناوله للعدد منطويا تحت تصور معين ، ولما كان مقصد « فريجه » أن يقدم الرياضيات على أنها تطور للمنطق ، كان من الضرورى أن يدعم تعريفاته للأعداد بتصورات معيارية من داخل المنطق ذاته ، وكانت تعريفاته التالية التى اتخذ من الصفر نقطة بدء لها[30] :

0 : هو العدد الذى ينتمى إلى التصور : « غير متطابق مع ذاته » .

1 : هو العدد الذى ينتمى إلى التصور : « يتطابق مع 0 » .

2 : هو العدد الذى ينتمى إلى التصور : « يتطابق مع 'O' أو مع '1' » .

3 : هو العدد الذى ينتمى إلى التصور : « يتطابق مع 'O' ، أو مع '1' ، أو مع '2' » .

ومن الواضح أن التصور « غير متطابق مع ذاته » أو « ليس مساويا لذاته » تصور منطقى خالص ، وأنه لا يطوى شيئا تحته ، ومن ثم فإن التعريف الأول يفى كل الحاجات . واضح أيضا أن التعريف الأول يخلو من أى تصورات مجاوزة للمنطق ، وكذلك بقية التعريفات وذلك أن « فريجه » قد نجح فى صياغتها جميعا بطريقة تسمح لنا بالاستمرار فى تعريف الأعداد التالية .

(29) Frege, Basic Laws, pp. 99-100.

(30) Frege, The Foundations, pp. 87-91 Basic Laws, pp. 99-101.

9 ـ ذُرّية العدد ولا تناهى الأعداد :

نجح « فريجه » على ضوء التعريفات السابقة بالاضافة إلى فكرتى المساواة العددية وذرية العدد Posterity ، فى اشتقاق كل القضايا الرياضياتية ومن بينها ما عرف بمصادرات « بيانو » عن الأعداد الطبيعية[31] . وان جاءت قضايا « فريجه » أكثر نضجا وتطورا واعتمد عليها فى بناء أنساق صارمة دقيقة . وفكرة ذرية العدد هى فكرة مقابلة لفكرة « تال لـ » ، وان كانت تؤدى نفس الغرض بصورة منطقية أكثر دقة . وتعرّف الذرية بأنها عبارة عن « مجموعة الأعداد ابتداءً من عدد ما بالنسبة إلى العلاقة 'سلف له' أو ' سابق له' »[32] . مثال ذلك أن ذرية العدد صفر تشمل الصفر والأعداد الطبيعية التالية له ، فهى تشمل صفر ، وصفر + 1 و 1 + 1 ... الخ ، أى متسلسلة الأعداد الطبيعية المتوالية . فإن قلنا طبقا لذلك إن الأعداد هى ما نحصله إذا ما انطلقنا من الصفر خطوة فخطوة ، فإن التعبير الأخير « خطوة فخطوة » ، يفتقر إلى الوضوح ، وما قام به « فريجه » من تأصيل للصفر ، ثم سبرغور فكرة الاضافة

(31) كتب « بيانو » مصادراته لأول مرة عام 1889 على هذه الصورة :

(1) 1 عدد .

(2) التالى لأى عدد عدد .

(3) ليس لعددين تالٍ واحد .

(4) 1 ليس تاليا لأى عدد .

(5) أن أى خاصية ينتمى إليها العدد 1 ـ وأى تالى لأى عدد ـ تنتمى إليها كل الأعداد .

ويبدو أن « بيانو » لم يدرك أهمية الصفر كعدد إلا متأخرا ، وبعد اطلاعه على أعمال « فريجه » فاضطر إلى تعديل مصادراته بحيث تبدأ بالصفر ـ كما ذهب فريجه ـ وبحيث يحل الصفر محل '1' فى المصادرات الأولى والرابعة والخامسة ؛ فأخذت الشكل التالى :

(1) 0 عدد (2) التالى لأى عدد عدد

(3) إذا كان لعددين نفس التالى ، فالعددان متطابقان .

(4) الصفر ليس تاليا لأى عدد .

(5) إذا كانت 'س' فئة ينتمى إليها الصفر ، وكذلك التالى لكل عدد ينتمى إلى 'س' فيترتب على ذلك أن كل عدد ينتمى إلى 'س' ولكن يظل « بيانو » مختلفا عن « فريجه » فى أن تصور الأول عن العدد كان يدور بصفة عامة حول العدد الترتيبى Ordinal .

أنظر فى ذلك: Kneale, Op. cit., p. 473 و « رسل » : **أصول الرياضيات** ، الجزء الثانى ، ص 26

(32) عبد الرحمن بدوى : مناهج البحث العلمى ، ص 63 ، 64

وتحليلها ، يجعلنا نستند إلى أسس منطقية واضحة . كذلك تعد كلمة « ذرية » تعبير دقيق لوصف متسلسلة الأعداد بدءا من الصفر ؛ فالأعداد الطبيعية هي ذرية صفر في إطار العلاقة « السالف مباشرة » والتي هو معكوسة « تال لـ » .

وقد رأى « فريجه » — كما رأى « رسل » بعده — أن مبدأ الاستقراء الرياضي — بصرف النظر عن كونه مبدأ خاصا للاستدلال يتعلق بنظرية الأعداد الطبيعية التي ندرك صدقها بحدس رياضي — يعد جزءا من تعريف العدد الطبيعي حيث نستطيع تعريف الأعداد الطبيعية كما نعرّف الموضوعات التي يصدق عليها الاستقراء الرياضي[33] . ذلك أن الفئة التي تتعلق بالعدد نقطة بدء لها تسمى فئة استقرائية Inductive Class ، تتكون من صفر ، صفر + 1 ، ثم بقية الأعداد التالية وهي كل الأعداد الممكنة . وهناك صلة بين العدد الأول أو الصفر وأي عدد تال نفترضه على أساس أن الأعداد لا متناهية . حيث نلحظ أن ما ينطبق على الأعداد المتالية من خصائص ينطبق على الأعداد ما بين الصفر حتى هذا العدد الذي نفترضه .

والحقيقة أن العلاقة وطيدة بين الأفكار التالية ، ان لم تكن جميعها تعبر عن حقيقة واحدة ، ونعني فكرة ذرية العدد ، متسلسلة الأعداد ، فكرة التالي لـ .. ، فكرة الاستقراء الرياضي ، الخصائص ، وأخيرا فكرة لا تناهي الأعداد . والحديث عن الفكرة الأخيرة أو لا تناهي الأعداد يستدعي مباشرة كافة الأفكار التي أشرنا إليها وبخاصة أن كل عدد له تالٍ .

وكانت طريقة « فريجه » في إثبات أن لكل عدد تال هي عين طريقته — أو هي المدخل على الأقل — لاثبات أن الأعداد تشكل متسلسلة نهائية .

فلنوضح طريقة « فريجه » في البرهنة على أن لكل عدد تال : أمامنا عدد وليكن (n) ، ونعلم بالتعريف أن (n) ينتمي إلى تصور وليكن (F) . ومهمتنا هي بيان أنه يوجد تصور (F) ينتمي إليه عدد هو التالي لـ (n) .

(33) Dummett, M., item "Frege" in Encyclopedia of Philosophy, Vol. 3.

علينا فى هذه الحالة أن ننظر فى التصور « عدد متسلسلة الأعداد المنتهية بـ (n) » ؛ لنوضح أن العدد الذى ينتمى إلى هذا التصور هى التالى مباشرة لـ (n) ونقوم بذلك بأن نستدعى أولا فكرة « موضوع يتلو آخر فى متسلسلة » ، ثم نطبقها على الحالة الخاصة بعدد يتلو آخر فى متسلسلة الأعداد ، وهنا نقول أن (n) يتبع (m) فى متسلسلة الأعداد ، ان التزمنا بما يلى[34] :

(1) فى كل حالات الخاصية (F) ، إن كانت (F) خاصية وراثية فى متسلسلة الأعداد ، وكان كل تال لـ (m) به الخاصية (F) ، فإن (n) به الخاصية (F) .

لنستخدم هذا التعريف لبيان أن لكل عدد تالٍ ، وذلك بأن نعيد صياغته بحيث نضع 'O' بدلا من (m) مساوٍ له ، ونضع « له تال » أو الخاصية « سلف لـ » محل (F) فنحصل على :

(2) لو كان « له تال » خاصية وراثية ، وكان كل تال لـ 'O' له تالٍ ، فان (n) له تال ، وينطبق ذلك على كل (n) يأتى تاليا للصفر فى متسلسلة الأعداد ، أى ينطبق على كل عدد غير الصفر .

تلك عبارة شرطية تتكون من سابق ولاحق ، فان أثبتنا أن السابق صادق ، كان اللاحق صادقا بالضرورة ، مع بيان أن الصفر ذاته له تالٍ . السابق هو : « له تال خاصية وراثية » ، « كل تال للصفر له تال » . واللاحق « فإن (n) له تالٍ بالنسبة لكل حالات (n) » . ولكى نزيد الأمر بساطة ووضوحا ، نختزل اللاحق فى (1) ونعيد صياغته كما يلى :

(3) فى كل حالات الخاصية (F) ، ان كانت (F) وراثية فى متسلسلة الأعداد ، وكان (m) به الخاصية (F) ؛ فإن (n) به الخاصية (F) . ونتوصل من هذه الصيغة الجديدة إلى قاعدة خاصة :

(34) Frege, Basic Laws, pp. 144 : 149.

(4) ان كان « له تال » وراثية ، وللصفر تال ؛ فإن (n) له تالٍ ، وذلك فى كل حالة يأتى فيها (n) تاليا للصفر فى متسلسلة الأعداد .

وهنا يصبح واجبا علينا أن نبرهن على أمرين : الأول ، أن « له تال » خاصية وراثية ، والثانى ، أن « الصفر له تالٍ » . ونمهد للبرهنة بأن نعيد ما قاله « فريجه » من أن ما يكون تاليا للعدد (n) يكون ما صدقا للتصور « مساوٍ — عدديا — للتصور 'عضو فى متسلسلة الأعداد المنتهية بـ (n)' » . بمعنى أنه العدد الذى ينتمى إلى التصور « عضو فى متسلسلة أعداد تنتهى بـ (n) » . وسوف نعبر عن العبارة الأخيرة — على سبيل الاختصار — أو العدد الذى تشير إليه بالمصطلح ع (-n) ، Num. (-n) . والآن لنثبت الأمر الأول وهو أن « له تال » خاصية وراثية ، فنقيم البرهان التالى[35] :

(5) ان كان (a) يأتى فى متسلسلة الأعداد تاليا مباشرة لـ (d) ، وكان ع (-n) يتلو مباشرة (d) ؛ فإن ع (-n) يتلو مباشرة (a) . أما إثبات الأمر الثانى أو البرهنة على أن « الصفر له تال » فيعنى البرهنة أن :

(6) ع (-O) يتبع مباشرة الصفر فى متسلسلة الأعداد . وبالنظر فى (5) ، (6) ، وفى المعنى الذى يفيده القول : « يتبع أو يتلو فى متسلسلة الأعداد » ، ينتج أن لكل عدد تالٍ[36] .

وما دمنا قد توصلنا إلى أن « لكل عدد تالٍ » ، فهذا يعنى أننا نستطيع أن نثبت أن الأعداد تشكل متسلسلة لا متناهية لكل عضو بها تال وحيد .

10 — نماذج لمبرهنات علم الحساب :

صدر كتاب **القوانين الأساسية لعلم الحساب** فى جزأين الأول 1893 ،

(35) Frege, The Foundations, pp. 94-5.

(36) Ibids, p. 95.

والثانى 1903 ، وكان انجازا رائعا حيث حفل بكل جديد على المناطقة وعلماء الرياضيات من دقة فى البراهين ، وتصنيفات تتعلق ببنية القضايا والجمل ومعانيهما ، بالاضافة إلى بناء النسق الرياضى متمثلا فى لا معرفات وتعريفات علم الحساب وقواعد اشتقاق واستنتاج ثم مبرهنات وطرق البرهنة عليها . وقد تكررت بعض الأفكار الأساسية التى وردت فى كتابه **أسس علم الحساب** ، إلا أنها جاءت فى كتابه الجديد أكثر صورية وأكثر دقة ، وان ظلت اللغة الرمزية التى كتبت بها شديدة التركيب .

نتقى من الأفكار الأساسية لنسق علم الحساب مجموعة من المبرهنات Theorems ، تتسم بالاتساق مع ما عرضناه فى هذا الفصل عن قواعد وشروط التعريف ، وفكرة المساواة العددية ، وتعريف الأعداد ، وفكرة تالٍ لـ . وفى رأينا فإن المبرهنات تعبر عن ما بلغه نسق من الأنساق من قوة وتماسك وقدرة على الاشتقاق والاستنتاج . ولأن هدفنا بعد هذا الفصل سوف يتجه وجهة ذات طابع فلسفى (ابستمولوجى وأنطولوجى معا) ، فلن نبالغ فى عرض طرق البرهنة على هذه المبرهنات ، لأن ذلك أدخل فى علم الحساب منه فى فلسفة الرياضيات . وحتى نتجنب ما اكتنف بعض طرق البرهنة من الاغراق فى الصورية والتعقيد الرمزى ، وان كان ذلك لا ينال من نسق « فريجه » بقدر ما يكشف عن خوفنا من خوض فيما لا نعلم . وما نعرض له من مبرهنات عبارة عن نتائج توصل إليها « فريجه » عن الأعداد الطبيعية ، وعن أول عدد لامتناه . لنفترض أن (u) ما صدق التصور (F) ، وأن ع (u) عدد الأشياء أو الموضوعات التى تندرج تحت (F) ، أما المبرهنات فهى[37] :

(I) ع (u) = ع (v) ، إذا ــ فى حالة الشرط فقط ــ كانت توجد علاقة ارتباط واحد لواحد بين التصورات التى يعد (u) ، (v) ما صدقات لها .
(مبرهنة 32 ، 49)

(37) Currie, Frege, An Introduction.., pp : 55-57.

(II) ان كان (u) ، (v) ما صدقات لتصورات يندرج تحتها نفس الأشياء تماما ؛ فإن ع (u) = ع (v) . (مبرهنة 96)

(III) لنفترض أن (u) ، (v) ما صدقات للتصورات (F) ، (G) على التوالى ، وأن ما يندرج تحت (F) أكثر بموضوع واحد فقط عما يندرج تحت (G) . ولنفترض أن [ع (u) = n] وأن [ع (v) = m] . إذن (n) هو التالى مباشرة لـ (m) . (مبرهنة 101)

(IV) علاقة التالى المباشر فى الأعداد الطبيعية هى واحد فواحد .
(مبرهنة 90)

(V) ع (u) = O ، ان كان (u) ــ وفى حالة الشرط فقط ــ هو ما صدق أى فئة فارغة . (مبرهنات 94 ، 97)

(VI) كل عدد غير 'O' يأتى تأليا مباشرة لعدد آخر . (مبرهنة 107)

(VII) 'O' ليس تاليا لأى عدد . (مبرهنة 126)

(VIII) ع (u) = 1 ، ان كان (u) ــ وفى حالة الشرط فقط ــ هو ما صدق تصور يندرج تحته شيء واحد تماما . (مبرهنات 113-121-122-117)

(IX) '1' هو التالى مباشرة لـ 'O' . (مبرهنة 110)

(X) $1 \neq O$ (مبرهنة 111)

(XI) لا يعقب عدد طبيعى ذاته فى متسلسلة الأعداد (مبرهنة 145)

(XII) لكل عدد تالٍ . (مبرهنة 157)

(XIII) ان كان (n) عدد طبيعى ، فإن (n) هو عدد الأعداد بين (1) ، (n) على نحو شامل . (مبرهنة 314)

(XIV) عدد الأعداد بين أى عددين طبيعيين هو عدد طبيعى . (مبرهنة 325)

(XV) ان كان ع (u) عدد طبيعى ، وكان (v) متضمنا فى (u) ؛ اذن ع (v) عدد طبيعى . (مبرهنة 443)

(XVI) لنفترض أن (u) و (w) منفصلان ، وأن (v) و (z) منفصلان ، وأن [ع (v) = ع (w)] وأن [ع (z) = ع (u)] .
∴ ع (v أو z) يساوى ع (u أو w) . (مبرهنة 469)

وهناك بعض المبرهنات التى صاغها « فريجه » فى كتابه **أسس علم الحساب** تدور حول الأعداد اللامتناهية ، وبخاصة حول أول عدد لامتناه ، وهو عدد الأعداد الطبيعية أو المتناهية . ومنها :

(XVII) اللامتناهى هو التالى لذاته (مبرهنة 165)

(XVIII) ان كان ع (v) متناه ، و ع (u) لا متناهى ؛ فإن ع (u أو v) يكون لا متناهيا . (مبرهنة 172)

(XIX) اللا متناهى ليس عددا طبيعيا . (مبرهنة 167)

(XX) لنفترض أن ع (u) = لا متناهى ، وأن (v) متضمن فى (u) وأن ع (v) ≠ لا متناهى ؛ فان ع (v) عدد طبيعى . (مبرهنة 428)

(XXI) ان كان (v) متضمن فى (u) ، وكان ع (v) = لا متناهى ، فإن ع (u) ليس عددا طبيعيا . (مبرهنة 484)

خاتمة :

تناولنا فى هذا الفصل الأعداد بوصفها موضوع علم الحساب الأثير ، وتوقفنا فى دراستنا عند حدود الأعداد الطبيعية وهو النوع الذى أولاه « فريجه » أهمية أكثر من بقية الأنواع . صحيح أن « فريجه » تناول بالدراسة الأعداد الحقيقية real numbers بما تتضمنه من أنواع أعداد فرعية[38] ؛ إلا أن دراسته لها تمت بطريقة منفصلة تماما عن الأعداد الطبيعية ، فالأعداد الحقيقية تستند ـــ فى رأيه ـــ إلى المنطق فى تقديم بناء جديد تماما يخصها ويثبت وجودها كمجموعة كيانات مختلفة ومتميزة عن الأعداد الطبيعية . وأهم ما يميز انجاز « فريجه » بهذا الصدد أنه رفض فكرة تعريف الأعداد الحقيقية بطريق التعميم انتقالا من الأعداد الطبيعية ، وهى الطريقة التى كان يسلكها بعض المشتغلين بالبحث فى أسس الرياضيات فى عصره .

ويبقى أن نفرق ـــ فى بساطة ـــ بين النوعين ، حيث نلاحظ أن الأعداد الطبيعية تستخدم فى عملية العد ، وتشير إلى عدد الأشياء التى تندرج تحت تصور محدد . بينما تستخدم الأعداد الحقيقية فى قياس المقادير والحجوم ، وقد عرّفها « فريجه » على أنها نسب بين المقادير ، حيث أن اثبات الأعداد الحقيقية يعادل تماما اثبات وجود المقادير . ولكن تظل الأعداد الطبيعية ـــ عند فريجه ـــ ونظريتها التى صاغها أكثر دقة واكتمالا ، بل أنها استنفدت جل جهده الذى بذله فى علم الحساب .

ونختم هذا الفصل بالاشارة إلى ثلاثة مراحل أساسية فى دراسة « فريجه » للأعداد :

ا ـــ بدأ « فريجه » ببيان أن قضية الهوية أو الذاتية ، يمكن تطبيقها بين

(38) مثل الأعداد الصماء وهو كسر بين كسرين ، وان كان تحديده على وجه الدقة يعد مستحيلا ، مثل $\sqrt{2}$. والأعداد التخيلية وهى عبارة عن جذر أى عدد سالب . بل والأعداد السالبة والموجبة والصحيحة كلها تدخل فى نطاق الأعداد الحقيقية

الأعداد من خلال المساواة العددية التى تتحقق عند وجود تماثل نعبر عنه بعلاقة واحد لواحد بين أفراد تصورين . وقد استخدم فكرة مماثلة واحد لواحد فى تعريف العدد .

ب ــ انتقل من التعريف العام للعدد على أنه « فئة تضم جميع الفئات المماثلة لفئة معينة » ، إلى تعريف أكثر تحديدا لكل عدد على حدة ، وأهم ما تميز به « فريجه » عن معاصريه هو تعريف الصفر ، وتعريف فكرة الاضافة ، ثم تناول الأعداد الطبيعية بالتعريف واحدا واحدا ، وقدم طريقة لتعريف التالى لأى عدد بلغة الأعداد السابقة عليه .

حـ ــ برهن فى النهاية على أن لكل عدد تال ، وتالٍ وحيد ، وأنه توجد أعداد لا نهاية لها .

الفصـل الرابـع

طبيعـة الأعـداد

الفصل الرابع
طبيعة العدد

كان « فريجه » فيلسوفا كما كان عالم رياضيات ، وقد أتاحت له قدرته على الابتكار أن يتناول مباحث الرياضيات والمنطق فى لغة فلسفية تتسم بالعمق والقدرة على التحليل . وقد كان سباقا فى تناوله للأفكار الرياضية ــ بصدد اصلاحها ــ بلغة فلسفية ومنطقية .

ونظرية « فريجه » عن الأعداد ، نظرية فى الفلسفة والرياضيات معا . وحديثنا الآن عن طبيعة الأعداد بعد تعريفها ، أو محاولة التعرف عليها عند « فريجه » ، لن يتسنى لنا إلا باستخلاص واستقراء مايتعلق بها من بين فصول وفقرات موزعة فى كتابات « فريجه » المختلفه ، وتدور حول موضوعات مثل : المعنى ، الدالات والمتغيرات ، قيم الصدق ، الأفكار .

I ــ العدد والمعنى :

تشكل أراء « فريجه » فى المعنى وجهة نظر متميزة ، وتدور بصفة عامة حول معنى عبارة ما ، وعلاقة هذا المعنى بما تدل عليه هذه العبارة . وقد انطلق فى بيان آرائه فى المعنى من مبدأ الهوية أو فكرة المساواة . يذهب « فريجه » إلى أنه يمكن التعبير عن مبدأ الهوية بالصيغة " أ = أ " ، وهى صيغة قبلية وتحليلية فيما يذهب « كانط » ، بينما لا يمكن اثبات الصيغة " أ = ب " بصورة قبلية إن ارتبطت مفرداتها بأشياء[1] . الصيغة الأولى تحليلية والثانية تركيبية ومن ثم فهما مختلفان . أما إذا أثبتنا أن علاقة الهوية فى الصيغة " أ = ب " لا تختلف

1- Frege, [1892] " Uber Sinn und Bedeutung " , Translated into English by Max Black as " On Sense and Reference ", in Philo soplical Review, Vol. LVll, P. 209. See also : Geach and Black (eds.) 1952, op. cit, P. 58

من الناحية المعرفية ــ بمعنى أن يشير أ ، ب إلى نفس الشيء ــ عن الصيغة " أ = أ " ، فإن الصيغة " أ = ب " تصبح صادقة[2] .

وقد لاحظنا أن مبدأ الهوية ــ فكرة المساواة[3] ــ هو أحد الأسس التى أقام « فريجه » عليها علم الحساب ، كما أنه نفس المبدأ الذى بدأ به دراسته عن المعنى والدلالة ، مما يجعلنا نحدس أن هناك علاقة بين أرائه فى الموضوعين . وليكن مدخلنا إلى بيان هذا الحدس توضيح وجوه العلاقة بين المعنى والدلالة .

أ ــ قد يكون لتعبيرين نفس المدلول ، بينما لا يكون لهما معنى واحد . فالتعبيران « تلميذ أفلاطون » و « معلم الاسكندر الأكبر » ، عبارتان معناهما مختلف ، ويشيران إلى شخص معين هو « أرسطو »[4] . وكذلك فى قولينا « نجم المساء » و « نجم الصباح » يدلان على نفس الموضوع ، كوكب الزهرة ، لكن ليس لهما معنى واحد .

يعنى ذلك أنه يمكن وجود أمثلة على رموز لغوية يكون لها نفس المدلول أو نفس الماصدق ، بدون أن تكون مترادفة فى المعنى . ان حاولنا أن نستقرىء ماقاله « فريجه » حول طبيعة الأعداد ويتفق مع هذا الرأى ، وجدنا أمثلة من هذا النوع :

يذهب « فريجة » إلى دحض الاتجاه القائل بالربط بين الموضوعية وماندركه بالحواس وحدها . فمن يعتمد على الحواس يرى أن " 7 " و " 5 + 2 " قضايا مختلفة . والحقيقة أنه لا يمكن أن نتحدث عن خواص حسابية للأعداد دون العودة إلى ماتشير اليه الرموز . مثال ذلك أن تأمل الخاصية المتعلقة بالعدد 1 ' ــ كونه حاصل ضربه فى نفسه ــ يصبح ضربا من الخيال فى نظر من يعتمد

2- Wienphal, P.D. [1950] " Frege's Sinn Und Bedeutung " Mind, 236, PP. 483-494.

See P. 484

(3) نلاحظ أن « ماكس بلاك » قد بدأ ترجمة مقال فريجه « المعنى والدلالة » مايو 1948 بكلمة Identity ، وبدأترجمة نفس المقال عام 1952 بكلمة " Equality "

4- Frege, " Sense and Reference " Philosophical Review. op. cit., P. 210

على الحواس وحدها ، لأنه لا يوجد بحث مجهرى أو كيميائى ـــ مهما كانت دقته ـــ يطلعنا على تلك الخاصية من مجرد مسحة البراعة التى يتسم بها مانطلق عليه العدد واحد . يواصل « فريجه » سخريته من الاتجاه الحسى قائلا : « لقد حلت الأعداد العربية محل الأعداد الرومانية ، لكن هل يزعم أحد أننا حصلنا من جراء ذلك على أعداد جديدة أو موضوعات رياضيات جديدة . ان علينا أن نميز بين الأعداد وبين ماترمز اليه هذه الأعداد ، ومن ثم علينا أن ندرك أن التعبيرات : (6÷3) , (3 - 1) , (1 + 1) , (2) ، ترمز إلى نفس الشيء رغم مابينها من اختلافات ظاهرية »[5] .

نلاحظ أن تمييز « فريجه » بين الأعداد وماترمز إليه هو عين التمييز الذى أقامه بين اسم العلم وإشارته ، ويهاجم « فريجه » فى الحالتين نظرية « جون ستيوارت مل » والنظرية الاشارية بصفة عامة التى ترى « أن مدلول أو ماصدق الرمز هو معناه ، وبالتالى فأى رمزين لا يكونا مترادفين إلا حينما يصدقان على نفس الموضوع أو الموضوعات »[6] . وهو مايذهب « فريجة » إلى بطلانه .

ب ـــ هناك أيضا أسماء أعلام أو ألفاظ ذات معنى إلا أنها بدون مدلول ، وليس لها اشارة إلى شيء بعينه ، وعبارات تحوى هذه الأسماء أو الألفاظ تعد ذات مفهوم إلا أنها بدون ماصدقات ، أى أن كل عبارة تحكمها قواعد اللغة وبها اسم علم لها معنى ، لكن لا يعنى ذلك أن لمعناها مايطابقه أو مايشير إليه بالضرورة . ان قولنا « أبعد الأجرام السماوية عن الأرض » قول له معنى إلا أن دلالته على نجم بعينه يعد محل شك ودون التحقق منه صغاب كثيرة . كما أن قولنا « أقل المتسلسلات العددية المتقاربة انحدارا »[7] قول له معنى ، لكنه بلا إشارة إلى كيان بعينه ، حيث توجد بالنسبة لكل متسلسلة متقاربة متسلسلة

5- Frege, The Foundations of Arithmetic, P. 114

6- عزمى اسلام [1985] مفهوم المعنى ، دراسة تحليلية ، حوليات كلية الآداب جامعة الكويت ، الحولية السادسة ، ص : 50

7- تكون المتسلسلة متقاربة ان كانت متتالية المجاميع الجزئية متقاربة ، ونعبر عن ذلك بقولنا : إن لمتتالية المجاميع الجزئية نهاية أو للمتسلسلة مجموعا . وفيما عدا ذلك نقول بأن المتسلسلة متباعدة . وتجدر

أخرى أقل انحدارا منها[8] . وتنسحب دلالة مثل هذه الأمثلة على عبارات أخرى مثل قولنا « ملك فرنسا عام 1990 » ، « المربع الدائرى » ، « العنقاء النجيبة » ، كلها عبارات ذات مفهوم وليس لأى منها ماصدق .

يقترب « فريجه » من هذا الاطار الذى يطرحه فى مقال « المعنى والدلالة » عند تناوله موضوعية الكيانات غير المحسوسة فى كتابه **أسس علم الحساب** بقوله :

> « عندما يتغلب الناس على تحاملهم ضد فكرة الموضوعات غير المحسوسة سيلاحظون أن العدد ليس مجموعة أشياء وليس خاصية لها ، كما أنه ليس حاصل جمع للعمليات الذهنية الذاتية »[9] .

ومعنى ذلك أن عبارات العدد لا تكتسب موضوعيتها من أمثلة حسية لها فى الواقع ، بل اننا نسلم بموضوعيتها حتى لو لم نجد لها مقابلا نشاهده . ان كل عبارة عددية تؤكد أمرا موضوعيا عن تصور ما ، حتى لو كانت هذه العبارة من نوع : $10000^{1000^{1000}}$ ، ولنقرب الصورة للقارىء فعليه أن يتصور كم هو هائل ماتعبر عنه هذه العبارة الرمزية العددية ، وبخاصة أن علمنا أن الألف = 10^3 ، المليون = 10^6 البليون = 10^9 ، والمائة بليون = 10^{11} ، فما بالك ب 1000^{1000} ، وكيف لنا أن نكتب أو نقرأ عددا كالذى أقترحه « فريجه » وهو « $1000^{1000^{1000}}$ » ؟ هل يعد رمزا فارغا ؟ لايرى « فريجة » ذلك على

= الاشارة إلى أن مجموع المتسلسلة المتقاربة يساوى نهاية متتالية المجاميع الجزئية . مثال على متسلسلة متباعدة $1 - 1 + 1 - 1 + 1 -$. لأن متتالية المجاميع الجزئية 1, 0, 1, 0 متباعدة

ومثال على متسلسلة متقاربة $1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})^2 +$

لأن متتالية المجاميع الجزئية تتقارب إلى 2

راجع : موسوعة الرياضيات (مؤسسة الكويت للتقدم العلمى) ج : 4

مادة « متسلسلة متقاربة » ص : 1070

8- Frege, " Sense and reference, " Op. cit., P. 211

9- Frege, The Foundations, P. 114

الاطلاق ، بل ان هذا التعبير العددى له معنى محدد حتى لو نأى عن وعينا من الناحية السيكولوجية ، أو لم يسعفنا العمر على ادراكه . يظل مثل هذا الرمز موضوعا قد نعرف خصائصه دون اعتماد على حدس ، لكن مايجب علينا أن نعرفه على وجه اليقين هو أنه موضوع له كيان واقعى مستقل عنا يرمز أو يشار اليه [10] .

نخلص من هذا إلى أنه توجد ــ فى رأى « فريجه » ــ رموز ذات معنى لكنها بلا ماصدقات تحت أيدينا ، بما فيها الأعداد ، وكونها بلا ماصدقات عينية أو محسوسة لا ينتقص من قيمتها المعرفية أو الوجودية ، بل انها واقعية ومستقلة عنا وعن أفكارنا الذاتية .

2 ــ العدد بين الدالة والمتغير :

ان بحث « فريجه » وجوه الاختلاف بين دالة رياضياتية Function ومتغير argument تحتويه ، يعد نموذجا لاستخدام تحليل الصيغة الرياضية كأساس نقيم عليه منطق التقريرات . يرى « فريجه » أن علماء الرياضيات لم يتنبهوا إلى التمييز بين الدالة والمتغير ، ففى الوقت الذى يسلم فيه كل امرىء بأن التعبير ” $2 \times س^3 + س$ “ هو دالة لـ ’ س ‘ ، يذهب بعض الرياضيين ــ قياسا على ذلك ــ إلى أن ” $2 \times 2^3 + 2$ “ هو دالة لـ ’ 2 ‘ . وهذا خلط لا يوضحه إلا التحليل المنطقى . لننظر فى التعبيرات التالية لفهم طبيعة الدالة ووجه اختلافها عن المتغير وموقع العدد منهما [11] :

$$2 \times 1^3 + 1$$

$$2 \times 2^3 + 2$$

$$2 \times 4^3 + 4$$

10- Jones, W. T., AHistory of Western Philosphy, P. 140

11- Frege, " Function And Concept ", translated by Geach, in Geach and Black, Op. cit., PP. 21-41 P. 23

ترمز هذه التعبيرات إلى أعداد هى : 3 ,18 ,132 . فان كانت هذه الأعداد دالات فى نفس الوقت فليس ثمة اختلاف اذن بين الأعداد والدالات ، وليس هناك جديد يجنيه علم الحساب من الحديث عن الدالات ، اذن لابد من وجود اختلاف بين مانطلق عليه دالة ومانطلق عليه عدد ، فما وجه الاختلاف ؟

من المسلم به أن من يستخدم كلمة « دالة » يجول فى خاطره عادة تعبيرات يشار فيها للعدد غير المعين بالحرف (س) ، مثال ذلك :

" 2 × س^3 + س "

إلا أن هذا التعبير لا يوضح الاختلاف بين الدالة والعدد بدقة ، ولكى نضفى دقة يفترضها الجهاز الرمزى الذى يستخدم " س " فى الاشارة [لعدد] غير محدد ، فاننا نطلق على " س " المتغير . لنحاول أن نفهم نفس الدالة مع اختلاف المتغيرات بحيث تصبح 1 ,4 ,5 فيما يلى(12) :

$$1 + 1^3 x 2$$

$$4 + 4^3 x 2$$

$$5 + 5^3 x 2$$

حين نتبين أن هناك عنصرا مشتركا بين هذه التعبيرات الجبرية يتضمن خاصية أساسية للدالة وهو (الأس) الذى يظهر فوق المتغير (س) فى التعبير :

2 × س^3 + س

وهو مايمكن أن نعبر عنه بدالة تأخذ هذا الشكل :

$$"(\ \ ) + ^3(\ \ \ )2"$$

ويؤكد « فريجه » على أنه معنى ببيان أن المتغير غير الدالة ، وان كانا يشكلان معا كلا مكتملا ، لأن الدالة وحدها ناقصة يعوزها الاكمال . وهنا وجه اختلاف أساس بين الدالات والأعداد يوضحه النظر فى أى عبارة جبرية — فى الرياضيات — تنقسم إلى جزأين : علامة المتغير ، وعبارة الدالة ، فمن

12- Ibid., P. 24

الملاحظ أنهما غير متشابهين لأن المتغير عدد ، كل مكتمل بذاته ، بينما الدالة ليست كذلك[13] .

فان استأنفنا مابدأناه من قول بأن العبارة الجبرية " 2 × س^3 + س " هى دالة لـ س ، فيجب ألا تؤخذ " س " على أنها متعلقة بالدالة ، بل يستخدم هذا الحرف فى الاشارة إلى نوع الاكمال الذى يعوزنا ، وفى تحديد المواضع التى ينبغى أن توضع علامة المتغير .

ويضيف « فريجه » بعدا فلسفيا بصدد بيان وجوه الاختلاف بين العبارات الجبرية الكاملة (المشبعة) Saturated والعبارات الناقصة (غير المشبعة) ، حين يرى أن مابين هذه العبارات لا يتوقف عند مجرد الاختلاف ، بل انها تمثل أنواعا مختلفة فى كياناتها اختلافا أساسياً . ومن ثم فان العبارتين الجبريتين :

$$"3" , "1 + 1^3 x 2"$$

اللتين تبدوان غير متشابهتين ، كلتاهما علامات على كيان من نوع واحد ، ونقصد به العدد ' 3 ' ، حيث أنهما يعنيان فى الحقيقة نفس الشىء ، بينما نجد أن العبارتين الجبريتين :

$$"(\ \ ) + ^3(\ \ )" , "1 + 1^3 x 2"$$

اللتين تبدوان متشابهتين إلى حد كبير ، هما علامات لنوعين متباينين فى الكينونة . حيث تعد العبارة الأولى علامة على عدد ، بينما تعد الثانية علامة على دالة . ويتمثل الخطأ الذى يقع فيه من يوحد بين الدالات والأعداد فى الخلط بين رمز ومايرمز إليه أولا ، ثم استباجه من اختلاف الرموز أنها تشير إلى أشياء مختلفة ، ومن تشابهها أنها تشير إلى أشياء متماثلة . ان من يقع فى هذا الخلط مثله مثل من يعد « البنفسج ذا الرائحة الذكية » " Sweet-smelling violet " مختلفا عن « أريج البنفسج » " Viole ordorata " لأختلاف طريقتنا فى نطق الأسماء فى الحالين . ان اختلاف العلامة أو الرمز لايعد فى ذاته سببا كافيا لاختلاف مانشير اليه من أشياء[14] .

13- Ibid., PP. 24, 25

14- Frege, " Function and Concept " , Op. cit. P. 22

3 - قيم الصدق :

تناول « فريجه » أيضا فى مقال « الدالة والتصور » فكرة قيم الصدق Truth Values ، وقد عرضها فى اطار فهمه لطبيعة كل من الدالة والعدد وتصوره عن فكرتى الصادق والكاذب . ويعرّف قيمة الدالة بالنسبة لمتغير على أنها « نتيجة اتمام الدالة بالمتغير ، بحيث يعد (3) قيمة الدالة (2 × س^3 + س) بالنسبة للمتغير 1 ، حيث أن " $2 \times 1^3 + 1 = 3$ " (15) .

فان تساءلنا عن قيم دالة ما ، ولتكن (س^2 = 1) ، بالنسبة لمتغيرات مختلفة ، ووضعنا محل (س) الأعداد -1 ، صفر ، 1 ، 2 على التوالى نحصل على :

$$(-1)^2 = 1$$

$$0^2 = 1$$

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 1$$

وأول مانلاحظه على هذه المعادلات ، صدق الأولى والثالثة ، وكذب الثانية والرابعة . يذهب « فريجه » إلى أن « قيمة الدالة هى قيمة صدق » (16) ، ويميز فى قيم الصدق بين ماهو صادق وماهو كاذب ، ويطلق على النوع الأول الصادق the True ، وعلى النوع الثانى الكاذب the False (17) ، وعلى سبيل المثال ترمز ($2^2 = 4$) إلى الصادق ، وترمز ($2^2 = 1$) إلى الكاذب . وتشير التعبيرات :

$$2^2 = 4 , \quad 2 > 1 , \quad 2^4 = 4^2$$

15- Ibid., P. 25

16- Ibid., P. 28

17- يوحى استخدام « فريجه » لكلمتى الصادق والكاذب معرفتين بأنهما يشيران إلى مسميات تشير بدورها إلى كيانات مستقلة . راجع :

Frege, Function and Concept, P. 28 & On Sense and reference, P. 63, in Geach and Black, (eds.)

وراجع أيضا محمود زيدان : فى فلسفة اللغة ، ص 120

إلى الصادق صدقا تاما ، حتى أن التعبير :

$$(1<2) = (4 = 2^2)$$

يعد معادلة صحيحة . ويوضح مايقصده « فريجه » بالمعنى والدلالة فى ضوء ماقد ينشأ من اعتراض على أن تتساوى ($2^2 = 4$) مع ($2>1$) ، رغم مابينهما من اختلافات ظاهرة ، فيضرب مثالا آخر :

أن العبارتين " $2^4 = 4^2$ " , " $4 \times 4 = 4^2$ " تعبران عن أفكار مختلفة إلا أن لهما نفس الدلالة أو الاشارة ، بحيث أن (2^4) , (4×4) يمكن أن تحل الواحدة منهما محل الأخرى . ويكرر « فريجه » مثاله المعروف : ان قلنا « نجم المساء كوكب سيار قريب من الأرض » فالفكرة التى نرمز لها تبدو لنا على غير ماتظهره العبارة « نجم الصباح كوكب سيار قريب من الأرض » ومن لا يعلم من الناس أن نجم الصباح هو نجم المساء يستنتج أن احدى العبارتين صادقة والأخرى كاذبة . والحقيقة أن العبارتين لهما نفس الدلالة لأنهما أسماء أعلام لنفس الجرم السماوى . وبالمثل فان 2^4, 4^2 لهما نفس الدلالة لأنهما أسماء أعلام لنفس العدد رغم أن ليس لهما نفس المعنى . وكذلك فان ($2^4 = 4^2$) و ($4 \times 4 = 4^2$) لهما نفس الدلالة وليس لهما نفس المعنى (بمعنى أنهما لا يحتويان نفس الفكرة) [18] .

وبناء على ماتقدم نقول : ($2^4 = 4 \times 4$)

كما نقول : ($2^4 = 4^2$) = ($4 \times 4 = 4^2$)

و : ($2^2 = 4$) = ($2>1$)

ان عدنا إلى الدالة موضوع حديثنا ($س^2 = 1$) لاحظنا أن قيمتها دائما هى احدى قيمتى صدق : صادقة أو كاذبة . فان حاولنا بيان كيف تكون صادقة حينا وكاذبة حينا آخر من خلال حجة أو برهان ، فعلينا أن نحدد متغيرا ، وليكن (- 1) فى حالة افتراض أن للدالة قيمة صدق صادقة :

للعدد (-1) خاصية أن تربيعه (ضربه فى نفسه) هو 1 ، وإن رجونا تعبيرا أكثر دقة قلنا " -1 هو الجذر التربيعى ل ' 1 ' " ، أو نقول بلغة منطقية : " -1 " ينطوى تحت التصور " $\sqrt{1}$ "

18- Frege, Function..., P. 29

وفى حالة أن تكون قيمة الدالة ($س^2 = 1$) قيمة صدق كاذبة بالنسبة لمتغير وليكن 2 ، فان ذلك يتضح من أن :

" 2 ليس جذرا تربيعيا لـ '1' "

أو " 2 لاينطوى تحت التصور '1' "[19] .

ورغم أن الحديث يدور هنا حول دالة الصدق ، إلا أنه يوضح فى جانب هام منه مدى إرتباط التصور فى معناه المنطقى بفكرة الدالة فى معناها الرياضى والعكس صحيح ، وفى هذا تبيان لما اتسمت به كتابات « فريجه » من دقة وقدرة على التحليل حين يستخدم الفكرة الواحدة (المعنى والدلالة مثلا) استخدامات متنوعة ـــ بنفس معناها ـــ بدرجة مهارة عالية فى المنطق والرياضيات .

4 - : **الأفكار** : Thoughts

تكتسب أراء « فريجه » عن الأفكار أهمية خاصة ، ومبعث أهميتها هو علاقتها بأرائه المضادة للنزعة السيكولوجية ، وعلاقتها بنظريته عن موضوعية الكيانات المجردة . وسوف نعرض لنظرية « فريجه » فى الأفكار خلال ثلاث نقاط تهمنا وتدور حول الأفكار الموضوعية والذاتية ، وطريقتنا فى ادراك وتحصيل الفكرة ، ثم علاقة العدد بالفكرة .

4-1 الموضوعية والذاتية : نبدأ هذه النقطة بتمييز هام بين الفكرة والصورة والانطباع فى ضوء فهمنا لفريجه وتعليقات الكتاب والنقاد على آرائه . أما الفكرة Thought (Gedanke) [20] ، فنعنى بها الفكرة فى اطار موضوعى ، لأنها موضع اتفاق بين الذوات وقاسم مشترك بين من يفكرون من ناحية كما أنها تتمتع فى فكر « فريجه » بواقعية واستقلال يضمنان لها الثبات .

ونقصد بالصور الذاتية Ideas (Vorstellung) تلك الأفكار الذاتية أو الصور

19- Ibid., P. 30

20- See, Geach & Black, Op. cit., P. ix

الذهنية الخاصة بكل فرد ، والتى لا تؤسس معرفة موضوعية . أما الانطباعات Images فتعبر عما تتركه الحادثات الخارجية من تأثيرات مؤقته على الذهن .

وقد رأى « فريجه » أن الصور والانطباعات لا يشكلان معرفة يقينية ، ويمكن التوحيد بينهما فى اطار الصور الذهنية mental pictures . اما مايؤلف عملية التفكير Thinking لدى الانسان فى صورته الموضوعية فهى الأفكار ، يرى « فريجه » ـــ بصدد معارضته للنزعة السيكولوجية ـــ أنه ينبغى النظر إلى مانقوم به من عمليات ادراك ومن تفكير واعتقاد وحكم على أنه ليس سوى اتجاهات ذهنية نحو مانصوغه من صور أو أفكار ذاتية تتسم بالتعدد والاختلاف ولا تشكل معرفة يقينية . وفى مقابل ذلك توجد حالات ينشأ فيها التفكير إلا أننا نعجز عن صياغة صور ذهنية مناسبة لما نفكر فيه ، أى أن هناك مايشكل تفكيرنا غير الصور الذاتية Subjective ideas ، انها الأفكار بمعناها الموضوعى Thoughts ، انها أساس الوظائف المعرفية للعقل ، وبالتالى فالتفكير ليس عملية نفسية بالمرة [22]

الأفكار إذن هى المادة الأصيلة لقيام عملية التفكير ، فاذا رأى أحدهم أن التفكير عملية ترتبط بالنفس أو تتم فيها كان رد « فريجه » :

> « حقا ، ان ادراك أو تحصيل الفكرة هى عملية تتم فى النفس (Selle) ! [23] ، إلا أنها عملية تقف على حواف النفس ، ومن ثم لا يمكن أن نفهمها من منظور نفسى خالص فقط ، لأنه لابد أن نأخذ فى الاعتبار وجود شىء لا يتعلق ـــ بالمعنى الدقيق ـــ بالنفس ، وهو الفكرة . وربما تعد هذه العملية (ادراك الفكرة) أكثر الأمور الغازا . [24] .

أما مايصاحب الادراك من عمليات داخل الذهن ، أو كيف يتم ادراك الفكرة

21- See, Dummett, M., **The Interpretation of Frege's** Philosophy, P. 51

22- Currie, G., [1980] " Frege on Thoughts, Mind, No. 354, P. 238

23 - يشير « فريجه » هنا إلى العمليات الذهنية mental **processes** والتى تتسم بالذاتية .

24- Frege, **Machgelassene Schriften**, ed. Hermes, [1969] Hamburg, P. 157

فهذه أمور لم يتطرق اليها « فريجه » ، « يكفى أن ندرك فكرة لكى تصبح صادقة . أما كيف يحدث هذا فتلك مسألة أخرى ... ان صعوبة هذه المسألة تنأى على الفهم . ان الناس يزجون عادة بالتفكير ـــ دون روية أو تدبر ـــ فى نطاق صياغة الصور ideas بدرجة لا يدركون معها كيف تم ذلك »[25] .

4-2 ادراك الافكار :

يذهب « فريجه » إلى أننا ندرك الأفكار عن طريق اللغة ، « يتسنى لنا ادراك الفكرة ـــ وهى غير مدركة بذاتها ـــ حين تبدو فى ثوب قابل للادراك ، هو الجملة »[26] . ولا نستنتج من ذلك أن « فريجه » يعتبر الجملة أكثر أهمية من الفكرة التى تعرضها ، بل ان الجملة تقوم بدور الشراع فى السفينة حين يسخر الرياح لتصبح سببا لحركة السفينة ، فالفكرة بدون جملة سفينة بلا شراع . ويبقى سؤال محير : كيف نستطيع باستخدام اللغة ـــ تلك الحادثة التى تحتل مكانا فى العالمين الذهنى والفيزيائى ـــ تحصيل فكرة مجردة ؟

لنتغاضى عن اجابة هذا السؤال رغم أهميته ، فلم نقع فيما خلفه « فريجه » من تراث على إجابة تفصيلية دقيقة لمثل هذه الأسئلة ـــ التى كان يعنى بها الفلاسفة ـــ اللهم إلا بيان العلاقة بين عالم الأفكار والعالمين الذهنى والفيزيائى وهو ماسوف نعرضه فى الفصل القادم .

مايهمنا الآن هو الحديث عن الفكرة فى اطار جملة أو فى اطار قضية حتى ندركها وتكتسب معنى وهو ماعبر عنه « فريجه » بمبدأ السياق Context Principle ، الذى يقول ببساطة : « تشير الكلمات إلى معان فى سياق قضية فقط » . وقد نصحنا باستخدامه عندما رفض الاعتماد على الصور أو التصورات كأساس تقوم عليه المعرفة ، كما أشار إلى أن الركون إلى معنى كلمة بمفردها قد يولد فينا معنى غير المقصود منها تماما ، « فقد نتزلق إلى رأى أصحاب الاتجاه المعارض لنا ، ان بحثنا عن معنى كلمة بمعزل عن السياق التى

25- Ibid., P. 158

26- Currie, Op. cit., P. 239.

ترد فيه ، مما قد يؤدى بنا إلى قبول صورة على أنها المعنى المقصود . ان مايجب أن نضعه نصب أعيننا هو القضية الكاملة (المكونة من كلمات ذات معنى ومغزى) فقد تمثل صور ذهنية أمامنا طوال الوقت ، ورغم ذلك لا تتسق مع العناصر المنطقية للحكم » (27)

ولمبدأ السياق أهمية خاصة فى فلسفة « فريجه » حيث يعد أداة إبستمولوجية هامة يستخدمها للتمييز بين الأفكار والصور ، ويؤكد دائما أن الأفكار هى موضوع التفكير دون الصور . ويمتد استخدام هذا المبدأ ليشمل طبيعة المعرفة . وفى رأى « فريجه » لا تتم المعرفة بطريقة مباشرة ، ذلك أنه ليس لدينا معرفة مباشرة بالأشياء ، بل تتم معرفة شىء ما عندما نعرف بعض القضايا ــ التى تحتوى أفكارا ــ تتعلق بهذا الشىء . فالأفكار (خلال القضايا) تتوسط بيننا وبين الأشياء التى نعرفها ، ومعنى ذلك أن ليس ثمة معرفة حدسية أو رؤية عقلية مباشرة . فهل ينسحب ذلك على الأعداد ؟

4 - 3 العدد فى ضوء الفكرة :

رفض « فريجه » زعما بأن تكون الأعداد صورا فى الذهن ، ذلك أننا لا نحوز أى صورة للأعداد ، ولا يمكن أن تكون نتيجة تصور ، بل انها تحتل مكانتها مع الأفكار بالمعنى الموضوعى . لكن إن سلمنا بالفكرة الموضوعية كوحدة أساسية للمعرفة بدلا من التصور Concept بمعناه التقليدى ، وقد أشرنا قبل ذلك إلى أن العدد لا ينتج عن تصور ، فهل يعنى ذلك تقاربا بين الفكرة والعدد ؟ وإذا كانت الفكرة تقدم لنا فى ثوب قضية ، فكيف تعطى لنا الأعداد ؟

يقول « فريجه » : « أن كنا قد سلمنا بأن الكلمات تكتسب معنى فى سياق قضية فقط ، فلنبحث عن معنى القضية التى تحتوى (كلمات) الأعداد » (28) ومعنى ذلك أن ماينطبق على الأفكار ينسحب على الأعداد أيضا من حيث

27- Frege, The Foundations, P. 71

28- Ibid., P. 73

درجة معرفتنا بها، فليس لنا اذن معرفة مباشرة بالأعداد فى ذاتها ، بل انها بالأحرى معرفة بقضايا عنها . ولما كانت الأعداد تقدم لنا فى اطار قضايا ، فتلك القضايا هى ما يؤلف بنية المعرفة الرياضية . وقد سبق أن رفض « فريجه » تكوين تصورات عن الأعداد تكون أساسا لتعريف العدد ، ومن ثم رأى أن الأجدى هو أن ننظر فى طريقة استخدام كلمات العدد فى عبارات متطابقة عن الأعداد ، ومنها عبارات المساواة العددية ، كما أشرنا فى موضع سابق .

5 - طبيعة الأعداد :

ليكن ختام هذا الفصل حديثا عن طبيعة الأعداد ، أو — إن شئنا الدقة — موضوعية الأعداد — فقد عرف عن « فريجة » حماسه لنزعة موضوعية تمثلت فى نواحى عديدة من بينها تأكيده على استقلال الكيانات المجردة — مثل الأعداد والقضايا — عن الفكر الذاتى للانسان . وقد عكس هذا الحماس نظرة إبستمولوجية حين تضمن دفاعه عن موضوعية الأعداد حججا عن نوع وطريقة معرفتنا بهذه الكيانات . ويلاحظ بعض الكتاب أن أراء « فريجه » عن الموضوعية هى صدى طيب لأراء « كانط » فى هذا المجال [29] لننظر فى أراء « كانط » عن الموضوعية أولا : ينكر « كانط » عن نفسه أن يكون مثاليا بمعنى الاعتقاد بأن العالم الخارجى عبارة عن بناء ذاتى . ان المكان والزمان والعلية والموضوعات التجريبية أمور غير واقعية فى نظر « كانط » بمعنى أنها من خلق الوعى . وفى مقابل ذلك، فان الأشياء فى ذاتها واقعية بمعنى أنها توجد مستقلة عن الوعى وتشكل جانبا أساسيا من نسيج الكون . ان العالم التجريبى الذى نخبره ليس فى حقيقته كما يبدو لنا . انه بناء من صنع جهاز ادراكنا الحسى . لكن لا يعنى ذلك أن العالم التجريبى عالم ذاتى يعتمد على خبرات ذاتية مختلفة لأناس مختلفين . انه واحد بالنسبة لكل الناس . بحيث يواجهه

29 - من هؤلاء « جريجورى كورى » فى كتابه فريجه ، مقدمة لفلسفته ، وفى مقال عن نظرية فريجه « فى « الأفكار » ، يحاول ان يحصر اهتمام « فريجه » فى دراسة مشكلات إبستمولوجية ، ويشكك فى النزعة الأنطولوجية لديه التى تشمل الأعداد والدالات والقضايا بالاضافة إلى الكيانات الذهنية والفيزيائية . وهذا ماسوف نتحقق منه فى بقية هذا البحث .

الواحد منا كمعطى له وليس كشيء من خلقه دون الآخرين . ان العالم الخارجي موضوعي ، بمعنى أنه موضع إتفاق بين الذوات intersubjective (30)

لكن ماذا يقصد « فريجه » بموضوعية الأعداد ، هل هو نفس المعنى الذى يسبغه « كانط » على موضوعات العالم الخارجي ، تلك الموضوعات التى تفتقر إلى اليقين فى فلسفة « فريجه » (31) ، أم معنى اتفاق بين الذوات على اطلاقه ، أم أن مصدر الموضوعية فى الأعداد أمر ثالث ينتمى إلى كيان مستقل عن الخبرة الحسية والحدسية (بالمعنى الكانطى) .

يقول « فريجه » :

« ان الأعداد ليست ملموسة ولا مرئية ، كما أنها ليست واقعية بمعنى أن تترك أثرا محسوساً ، انها لا تخضع للتغير ، لأن مبرهنات علم الحساب بمثابة حقائق أبدية . يمكن القول اذن أن الأعداد تقع خارج نطاق الزمن ، وينتج عن ذلك أنها ليست مدركات ذاتية أو أفكارا ، لأن هذه وتلك تتغير باستمرار بما يتسق مع القوانين السيكولوجية . ان قوانين علم الحساب لا تشكل جانبا من علم النفس . انها لا تجيز أن يكون لكل فرد منا عدد خاص به — وليكن الواحد — يشكل جانباً من وعيه . الحقيقة أنه يوجد عدد وحيد بهذه التسمية ، انه واحد بالنسبة لكل الناس ، وموضوعي بالنسبة لهم جميعا » (32) .

يود « فريجه » أن يؤكد أن الأعداد واحدة بالنسبة لنا جميعا ، وليست من نتاج أو خلق الذهن الفردى . انها موضوعية بمعنى أنها موضع اتفاق بين جميع الأشخاص ، وموضوعية لأنها تقع خارج نطاق الزمن ، وموضوعية أخيرا لأنها تخضع لقوانين نفهمهما جميعا .

30- Currie, G., Frege, An Introduction.., PP. 178 - 9

" Frege on Thoughts " PP. 234 - 5

31 - راجع الفصل الأخير ، الفصيل 3

32- Frege, " The Whole Number ", Mind, Vol. No. 79 Quoted from, Currie, " Frege on Thoughts ", Op. cit., PP. 179-180

ألا يفوح من عبارات « فريجه » أريج أفلاطونى ؟ وبخاصة أقواله : « ان مبرهنات علم الحساب تجسد حقائق أبدية » ، « تقع الأعداد خارج نطاق الزمن » ، ألا يدفعنا ذلك إلى تناول الموضوع تناولا أنطولوجيا على الرغم من محاولة بعض الكتاب ــ مثل ج . كورى (فى غالب الأمر) وميشيل دميت (أحيانا) ــ أن يطمس معالم أنطولوجية « فريجه » بدعوى أنها لا تتسق مع الاتجاه العام لفلسفته ؟! . يقول « كورى » : « إذا مانظرنا إلى **أسس علم الحساب** على أنه بحث ميتافيزيقى يتناول موضوعات علم الحساب تناولا أنطولوجيا ، فان ذلك يؤدى بنا إلى عدم فهم الهدف المنشود من ورائه . كان « فريجه » يقصد ــ فى ظن كورى ــ الدفاع عن موضوعية ماهو موضع اتفاق بين الذوات ، أى معرفتنا بعلم الحساب ، وليس السعى وراء مقولة أنطولوجية عن الأعداد ذات الوجود الذاتى [33] ويستشهد على ذلك بقول « فريجه » : « يجب ألا يؤخذ الوجود الذاتى الذى أضفيه على الأعداد بمعنى أن كلمة عدد تدل على شيء بعد أن ترفع من سياق العبارة » . وعلى أى حال فان مانفهمه نحن من هذه العبارة عكس مايراه « كورى » تماما ، ذلك أن مايقصده « فريجه » بكلمة شيء الواردة فى عبارته أن تدل على شيء محسوس ، بحيث ينفى إرتباط وجود الأعداد حضورا وعدما بوجود شيء مادى يبقى شاخصا أمامنا حتى بعد أن نرفع الكلمة الدالة عليه من سياق عبارة ، كما ينفى أن تكون تجريدا عن أشياء واقعية بمعنى حسى ، لأن كل ذلك ينال من موضوعية الأعداد ، وفى ظننا أن اسباغ الوجود هنا على الأعداد يقصد به اضفاء الدوام والثبات عليها ، انه وجود من نوع خاص ، ينسحب على كافة الكيانات الرياضية .

ويؤيد رؤيتنا لموضوعية الأعداد (بصفة خاصة) وموضوعية الرياضيات (بصفة عامة) مايراه « بلانشيه » Blanche حين يحدد موضوع الرياضيات بقوله : « أى نوع من الحقيقة يمتلك العدد ' 3 ' أو المثلث متساوى الأضلاع ؟ أننا لا نعنى بالعدد ' 3 ' هذه الكومة المكونة من ثلاثة أحجار ، كلا .

33- Ibid., P. 179

ولا نعنى بالمثلث هذا المثلث الذى قمت برسمه على الرمل ، فهذه الموجودات عبارة عن موجودات تجريبية مفردة عينية ، وهى بخلاف الموجودات العامة المجردة موضوع الرياضيات البحت . ولا نعنى أيضا بالعدد ' 3 ' أو المثلث أفكارى عنهما فى هذه اللحظة الراهنة وبوصفى ذاتا فردية ، وانما الذى نعنيه هو مايكون موضوع أفكارى عنهما ومايجعل هذا الموضوع عاما ولا زمنى » (34)

تلخص عبارة « بلانشيه » كافة العناصر التى أشرنا اليها فى هذا الفصل من بحث لطبيعة العدد وعلاقته بمباحث أخرى ، بالاضافة إلى مايتسم به العدد والرياضيات من موضوعية .

وفى رأى فانه يصعب علينا أن نتحدث عن موضوعية للأعداد بالمعنى الذى يقصده « فريجه » دون ربطها بمعنى خاص للواقعية ، أقرب إلى الواقعية بالمعنى الأفلاطونى . إلا أن « كورى » يريد أن يصل إلى نتيجة فحواها أن دلالة الحدود العددية لا تتمثل فى الاشارة إلى موضوعات أفلاطونية لها وجود ذاتى مستقل ، بل تتمثل فى وجودها عبارات أو قضايا تدخل فى بناء معرفتنا بالرياضيات . ويذهب نفس المذهب ــ وان كان يختلف معه فى التفصيلات ــ « ميشيل دميت » حين يحاول أن يطبق مبدأ السياق الذى اقترحه « فريجه » لكى ينسحب على كل فلسفته ، ويذهب « دميت » إلى أننا لا نسلم بصحة الحدود المجردة كالأعداد لأنها أشياء مجردة بالفعل ، بل لأن العبارة التى تحتويها عبارة صادقة . بمعنى أن صدق العبارة يضفى دلالة على حدودها . (35)

اننا فى مواجهة آراء « كورى » و « دميت » ، لا نرى تناقضا بين التسليم بواقعية الأفكار والأعداد والقضايا تتجاوز الأسباب الابستمولوجية لها والتسليم

34 - روبير بلانشيه : نظرية المعرفة العلمية ، ص : 123

35- Dummett, M., [1973] Frege, The Philosoply of Language, Duckworth, London, P.497

بمفهوم أنطولوجى يضمن لها موضوعيتها واستقلالها بوجودها فى لازمان . ألا يمكن أن توجد الأفكار وغيرها من الكيانات المجردة لتؤدى دورا إبستمولوجيا وتكتسب واقعية ــ لانتمائها إلى عالم مفارق ــ فى نفس الوقت ؟ تساؤل نطرحه لنجيب عنه فى الفصل القادم .

ونعيد طرح الغرض الأساسى لبحثنا هذا ، لنر إلى أى حد تقدمنا :

كان اهتمام « فريجه » ينصب فى بداية الأمر على رفضه نزعة شكية ألمت بعلم الحساب ، فاهتم بأمور تدور حول طبيعة معرفتنا بعلم الحساب بادئا بالعدد وتعريفه . وكان عليه أن يتخذ موقفا أنطولوجيا عندما أحس بضرورة تبرير معرفتنا بالأعداد والقوانين والعلاقات ــ حتى لا يظل التبرير البراجماسى هو الضامن لوجودها ، أو بقائها مادامت تستخدم ــ ومن ثم كان عليه مناقشة فكرة الوجود ، وجود الأعداد من بين أشياء أخرى .

الفصــل الخامـس

وجــود الأعــداد

« واقعية أفلاطونية أم مثالية كانطية »

الفصل الخامس

وجود الأعداد
« واقعية أفلاطونية أم مثالية كانطية »

مقدمة :

نجمل فى مقدمة هذا الفصل التساؤلات التى نحاول مناقشتها هنا ونطرحها كما يلى :

— هل كان « فريجه » واقعيا بالمعنى الأفلاطونى ، يعتقد بوجود الموضوعات أو الكيانات المجردة مثل الأعداد ، بحيث تصبح فلسفته اسهاما فى مبحث الوجود بمعنى دراسة المقولات العامة للوجود .

— أم أنه لم يكن مهتما بالمشكلات الأنطولوجية بصفة أساسية ، وانما اهتم بمشكلات ذات طابع إبستمولوجى تتعلق بأرائه عن موضوعية ينسبها إلى الرياضيات والمنطق ، وعن واقعية مفترضة للكيانات المجردة بصفة أساسية .

— وفى مقابل هذين الاتجاهين ، ورغم تأويلات جمهرة الكتاب والنقاد ممن يميلون إلى الأخذ بأحدهما دون الآخر ، هل نقول أن « فريجه » قد جمع بينهما بالفعل ، بحيث اهتم بالمعرفة الموضوعية ثم جعل للأفكار المكونة لها عالما مستقلا عن عالم الحالات الشعورية المتغيره وعن العالم المادى .

ويتفرع عن التساؤل الأخير ، تساؤل أكثر خصوصية : هل تعود موضوعية الأعداد إلى أسباب أنطولوجية بانتمائها إلى عالم خاص بالأعداد وبقية الأفكار بالمعنى الأفلاطونى ، أم تعود موضوعيتها — ومن ثم وجودها — إلى أسباب إبستمولوجية فيما يطلق عليه (ماكان موضع اتفاق بين الذوات) بالمعنى الكانطى . أم أن الموضوعية هنا هى جماع الرأيين معاً .

1 - فى معنى الواقعية :

كلمة الواقعية Realism كلمة هامة فى تاريخ الفكر الانسانى ، وهى معروفة منذ عصر « أفلاطون » — أو ماقبله عند الفلاسفة الماديين الأوائل — وتشير إلى تيارين متعارضين ، الأول مثالى مناقض للنزعة الاسمية nominalism ، حيث يؤمن بوجود كيانات مجردة ، مستقلة عنا ، لها عالمها الخاص ، مثل عالم المثل عند « أفلاطون » وتعبر عنه نظرية الحدود العامة والمجردة أو الكليات ، التى تذهب إلى أن الكليات سابقة فى وجودها على الأشياء . ويتفق « فريجه » مع الا... العام لهذا الاتجاه ، فى رأينا . أما التيار الثانى فهو مناقض للنزعة المثالية حيث يسلم بوجود أشياء مادية فى العالم المكانى لا يعتمد وجودها على أن يشعر بها عقل ، ويمثل هذا الاتجاه كل فلسفة تعترف بوجود واقع مادى بصرف النظر عن العقل الذى يدركه .[1]

ونلاحظ للوهلة الأولى أنه رغم التمييز بين نوعين من الواقعية أحدهما مثالى والآخر مادى ، فان ثمة تصنيفا آخر يمكن أن نستنبطه إذا نظرنا إلى المصطلح نفسه فى ضوء مبحثى الوجود والمعرفة[2] ، حيث يعنى المصطلح من ناحية الوجود أمور ثلاثة : واقعية مادية ، وساذجة ، ونقدية ، والاختلاف بينها ناشىء عن مدى ارتكانها للذهن فى تلمس العالم الخارجى . وفى ضوء مبحث المعرفة يؤكد المصطلح على « الوجود المستقل للمعانى والكليات عن الذهن » . وسوف تؤيد هذه الملاحظة — التى نسجلها فى مدخل الفصل — التفسير الذى نميل إلى الأخذ به فى بيان موقف « فريجه » .

لنتوقف قليلا عند قولنا « الوجود المستقل للمعانى والكليات عن الذهن » ولنزاوج بينه وبين قول « بلانشيه » : « ان المفكر الذى يريد أن يدافع عن الطابع الموضوعى للرياضيات يجد نفسه مضطرا إلى التحدث بلغة الواقعية الأفلاطونية »[3] . وتفسير ذلك لديه « ان الاعتقاد فى وجود الماهيات

1- Runes (ed.) Dictionary of Philosophy, item, Realism P. 264

2 - راجع المعجم الفلسفى (مجمع اللغة العربية) ، مادة : واقعية ص 210

3 - بلانشيه : الابستمولوجيا (الترجمة العربية) ، ص : 132

الرياضية المفارقة الثابتة يعنى ــ خلافا لدعاوى المذهب الاسمى ــ أن الحقائق الرياضية ليست تعسفية وأنها لا تعتمد على مزاجنا الخاص ، كما أنه يعنى أنها ليست مجرد لعبة خطية ، وأن الحقيقة الرياضية ــ خلافا لدعاوى المذهب الحدسى ــ مستقلة عن معرفتنا بالوقائع العرضية التى أحاطت باكتشافها ، وأن القضية الرياضية ــ وليست الرياضة نفسها ــ من نتاج عقولنا . وأن النزعة الأفلاطونية التى تبناها « فريجه » كانت بدايتها عبارة عن رفض للمذهب الاسمى الذى تبناه « أ . هاين » [4] .

وماتفيده هذه العبارة يؤكد موقفنا ــ من تفسير فلسفة « فريجه » ــ وهو أن استقلال المعرفة الرياضية وموضوعيتها يرتبط لدى بعض الفلاسفة ومن بينهم « فريجه » بواقعيتها كمعرفة عقلية خالصة لا تستند إلى المعرفة الحسية وتطل بنا على عالم الماهيات الخالدة مصدر العلم الحقيقى .

علمنا أن الأعداد موضوعات موجودة بذاتها ، ومن ثم تصبح مهمة علماء الرياضيات « ليست خلق الأعداد ، بل الكشف عما هو موجود منها بالفعل » . والأعداد مثل القضايا وكافة الأفكار الموضوعية تشغل عالما خاصا بها ، فهناك ثلاثة مجالات أو عوالم تحدث عنها « فريجه » هى المجال أو الواقع الأول ويشمل الموضوعات الفيزيائية بكافة مظاهرها ، والمجال الثانى هو عالم الحالات النفسية والشعورية والذهنية ، ثم المجال الثالث وهو عالم الأفكار الخالصة وماليس فيزيائيا أو ذهنيا . وأفكار هذا العالم ــ بما فيها الأعداد ــ لا نخلقها ولا نحدثها فهى كيانات ثابتة لا زمن لها Timeless ولا تؤثر فيها الحادثات .

لكن هل كان « فريجه » أول من قال بهذا التصنيف ، أو بمعنى أشمل : هل كان هو أول من قال بعالم مفارق للأفكار يتعالى على الواقع المتغير ؟

---

4 - نفس المرجع ، ص 131 ، ص 132

5- Frege, The Foundations, P. 67

2 - عالم الأفكار (نظرة تاريخية)

يعد « أفلاطون » أول من قال بعالم مفارق للأفكار ــ نظرية المثل ــ له طابع الهى تقطنه تصورات وماهيات كاملة وصادقة وثابتة . وتتسم وقائع هذا العالم بأنها حقائق مجاوزة للادراك والفهم الانسانى بوسائله العادية ، وأنها مستقلة بذاتها سواء اكتشفنا وجودها أو لم نكتشفه بالاضافة إلى أن اكتشاف هذه الوقائع لا يزيدها قيمة ، كما لا ينقص من قدرها عدم اكتشافها [6] .

ونجد فى فلسفة « هيجل » نسقا مستقلا عن الواقع المادى ويكتسب صدقه من اتساقه الداخلى ، ويقع على قمة هذا النسق الروح الموضوعى Objective Spirit أو العقل الموضوعى ، الذى يتسم بأنه موضوع تغير على خلاف عالم المثل الأفلاطونية . فالروح المطلق أو الفكرة الشاملة يأتى طبقا للجدل الهيجلى على ثلاثة وجوه : فالمطلق هو الوجود وهذا هو جوهر فلسفة الايلين ، وفى المقابل نجد أن المطلق هو العدم وتلك هى المقولة الثانية فى سير المنطق وتمثل خلاصة الفلسفة البوذية ، ثم المطلق هو الصيرورة ــ التعريف الثالث للمطلق ــ وهو مركب التعريفين السابقين . ولهذا فهو أول فكرة شاملة وأول فكرة عينية فى نفس الوقت ، وهذا التعريف يلخص فلسفة « هيراقليطس » [7] . ويقدم لنا المنهج الجدلى سلما للمعرفة بدءا من فهم الأشياء تحت مقولة الوجود ثم معرفتها بصفتها تخضع لصيرورتها ، ثم صعودا فى سلم المعرفة لمعرفة الشيء فى اطار الماهية ، وهنا ندرك أن الأشياء ليست الا فكرا أو أنها على وجه الدقة الفكرة المطلقة [8] .

كذلك اهتم « بولزانو » [9] Bolzano (1781 - 1848) بالقضية فى ذاتها وهى

---

6 - محمد محمد قاسم [1986] : **كارل بوبر** ، دار المعرفة الجامعية ، ص 357

7 - امام عبد الفتاح امام : [1969] ، **المنهج الجدلى عند هيجل** ، ص : 146

8 - نفس المرجع : ص 147

9 - « برنارد بولزانو » فيلسوف وعالم رياضيات نمسوى . عمل أستاذا لفلسفة العقيدة فى « براغ Brague فى الفتـرة مابين (1805-1820) وقد أجبر على الاستقالة من عمله لتبنيه نزعة عقلية فى دراسة اللاهوت ساهم بعدة أفكار صائبة فى تطوير المنطق الرمزى والرياضيات .

Dictionary of Philosophy, OP. cit., P. 39

مايمكن أن يكون فكرة أو محتوى فكرة ، والقضايا فى ذاتها تطابق الأفكار الخالدة الموجودة فى عقل الله حسب تصور « ليبنتز » وان كانت لا تعتمد فى وجودها على أى كائن . وتوجد القضايا بذاتها فى عالم مستقل خاص بها ، وهى ليست واقعية بالمعنى المادى ، ذلك أنها لا تشغل حيزا ولا زمانا .

أما « مينونج » [1853 - 1921] و « هوسرل » [1859 - 1938] فقد عاصرا « فريجه » ، وكانت رؤيتهما لعالم الفكر وعلاقته ببقية العوالم النفسية والفيزيائية قريبة من رؤية « فريجه » . افترضا عالما ثالثا — إلى جوار عالم الطبيعة وعالم الحالات النفسية — يكون مجالا لتلمس معانى أفكارنا . وبيان ذلك قولهما أنه لابد لكل تصور عقلى أو حكم أو تذكر أو استدلال ، لابد من طرف خارجى يشير إليه ويتعلق به ، ليس طرفا طبيعيا أو ماديا لنتأكد من صدقه عن طريق التحقيق ، وانما عالم مستقل للمعانى . ذلك أننا لا نعتمد فى صدق التصورات أو المبادىء الكلية على العالم المحسوس ، كما أننا لا نتصور نشأة هذه المعانى من فراغ ، وانما لابد من افتراض عالم ثالث إلى جانب الطبيعة والنفس هو مجال المعانى .(10)

ولم تتوقف فكرة عالم الأفكار عند عصر « فريجه » ، بل ظهرت واضحة جلية لدى بعض فلاسفة العلم المعاصرين وأبرزهم « كارل بوبر » [1902 -] الذى قال بنظرية ميتافيزيقية حين تحدث عن ثلاثة عوالم متمايزة من الناحية الأنطولوجية : الأول عالم فيزيائى يشمل الأشياء المادية العضوية وغير العضوية ، والثانى عالم الخبرات الشعورية الذى يضم الخبرات الحسية وأفكارنا وخيالاتنا ، والثالث عالم المعرفة الموضوعية وهو عالم موضوعات الفكر والنظريات فى ذاتها وعلاقاتها النقدية .(11)

نتهى إلى أن القول بعالم واقعى مستقل للأفكار ليس من إبتكار « فريجه » وإنما يعزز موقف « فريجه » أنه كان حلقة وصل بين قدماء رأو فى الفكرة نصيرا لثبات الأفكار وموضوعيتها ، ومعاصرين نادوا بالفكرة فى ضوء نتائج العلم المعاصر .

10 - زكى نجيب محمود : نحو فلسفة علمية ، ص : 124

11 - محمد محمد قاسم : المرجع السابق ، انظر الفصل التاسع بوجه خاص .

3 - واقعية العوالم الثلاثة :

يسلم « فريجه » بوجود ثلاثة عوالم هي حسب أهميتها : عالم الأفكار Thoughts ، والعالم النفسى ، والعالم الفيزيائى . لم يقدم حججا لاثبات عالم الأفكار وانما سلم به بناء على ضرورته وبديهيته ، أما بصدد العالمين النفسى والفيزيائى بوصفهما مجالين متمايزين فقد جاءت حججه عنهما فى مواجهة مذهب « الواحدية المحايدة » neutral monism ، القائل بأنه لا وجود للنفس ولا للعالم الفيزيائى ، بل هناك مقولة فريدة غير مميزة من الاحساسات ينظر اليها من منظور العلم الفيزيائى حينا ، كما ينظر اليها من منظور علم النفس حينا آخر وذلك فى ضوء رغباتنا وأهدافنا . وكان الفيلسوف « إرنست ماخ » Mach المعاصر لفريجه واحدا ممن يمثلون هذا الرأى ، حيث تبنى أراء فحواها أن العلم لا يهدف إلى الكشف عن صدق أو حقيقة واقع فيزيائى مستقل ، وانما هدفه صياغة علاقة موجزة للبناء الوظيفى بين مجموعات الاحساسات ، بحيث تيسر لنا هذه العلاقة التنبؤ ونقل العلم إلى مرحلة التطبيق [12]

كان العلم يتجنب تبنى أى أنطولوجيا مرية مستندا الاحساسات والتجربة كمادة أولية لبناء نسق العلم . وجاءت مقالة « فريجه » « الأفكار » [13] محاولة للرد على هذا الاتجاه بصفة عامة وفلسفة « ماخ » بوجه خاص .

ويبدأ « فريجه » محاولته باثبات وجوده الخاص أى اثبات وجود النفس ومايطلق عليه عالم المشاعر والأفكار الذاتية ، ثم ينتقل ـــ على نحو مشابه لمنهج ديكارت ـــ إلى التسليم بوجود الموضوعات الفيزيائية للعالم الخارجى ووجود الآخرين وذواتهم الواعية . يسوق « فريجه » الحجة التالية لاثبات النفس :

ان سلمنا مع القائلين بنظرية الواحدية المحايدة « أن كل شيء فكرة ذاتية idea أو صورة [14] ، أو مجرد انطباع حسى ، فلا بد من حامل لهذه الصور

12- Currie, **Frege, An Introduction** ..., P. 182

13- Frege, " Thoughts ", reprinted in Angelelli (ed.) [1967], Studies on Gottlob Frege and Traditional Philosophy, Dordrecht · Reidel, PP. 342-362

14 - هناك تمييز واضح فى فكر « فريجه » بين الفكرة Thought بمعناها الموضوعى وتتسم بالثبات والاستقلال ، والفكرة الذاتية idea التى تختلف باختلاف الأفراد وتقوم بهم .

لا يمكنها أن توجد بدونه . ان اعتبرت نفسى حاملا لأفكارى الذاتية ، فهل أعد أنا الآخر فكرة ؟ (كا يذهبون !!) . وماالذى يجعل هذه الفكرة الذاتية دون الباقيات موضع تخيرى لأطلق عليها « أنا » ؟ ... لو كان كل شيء عبارة عن صورة أو فكرة ذاتية ؛ فلن يوجد حامل لهذه الصور والأفكار . وإن لم يوجد حامل لها فلن توجد بالتالى أفكار ذاتية أو انطباعات حسية كتلك التى ينادى بها أصحاب الواحدية المحايدة . والخلاصة أنه إن لم تكن الذات فكرة ذاتية ، فمعنى ذلك أن نسلم بوجود شيء ليس بذاته مجرد إنطباع ؛ انه النفس أو الذات الواعية »[15]

ويقدم « فريجه » حجة ثانية على وجود النفس مستخدما برهان الخلف ، وفحوى هذه الحجة أننا ان سلمنا بأن الذات هى مجرد فكرة ذاتية أو انطباع ، فانها تشغل حيزا من الوعى . ولما كان من الضرورى أن تتضمن فكرة الذات فكرة الوعى ، ومادمنا على وعى بالذات ، فان فكرة الوعى فى صورتها الجديدة ينبغى أن تحتوى فكرة الذات فى صورتها الجديدة ، والتى تختلف عن تلك الفكرة التى أخذنا بها أولا[16] . ويمكن أن تمتد هذه البرهنة بحيث تحتوى كل فكرة جديدة للوعى على فكرة أخرى للذات ، إلى مالا نهاية . أما إن سلمنا بتميز الذات واختلافها عن الفكرة الذاتية أو الانطباع الذى تعيه فاننا نوقف هذا التسلسل عند ذات أو نفس تحتوى الوعى وليس العكس .

ينتقل « فريجه » إلى اثبات وجود العالم الخارجى ، ولم يقدم برهانا قائما بذاته ، وانما رأى أنه مادامت لدينا معرفة بذواتنا ، وحيث أن الذات ليست فكرة ذاتية ، فليس هناك تعارض من حيث المبدأ أن نفترض وجود أشياء أخرى نعرفها ـــ ليست أفكارا ذاتية أيضا ـــ مثل الأجسام الفيزيائية . واستنتج أنه يمكن الاستطراد إلى ماوراء خبرتنا المباشرة نفترض وجود أشياء

15- Frege, Thoughts, Op. cit., P. 356

16- Ibid., P. 357

See also :

Frege, " Dialouge Whith Punjer on Existence " in Long & White, Op. cit., PP. 53:67. P. 57

خارج ذواتنا وتشغل حيزا مكانيا وزمانيا ، ويتم ذلك فى اطار درجة احتمال قابلة للزيادة والنقصان .

ويلاحظ أن « فريجه » لم يسبغ على وجود العالم الخارجى يقينا مماثلا لوجود الذات ، فهو يعرف ذاته بطريقة مشابهة للكوجيتو الديكارتى : « أنا أفكر اذن أن موجود » ، وعندما يتجه نحو الآخرين يبدأ فى الشك . وأكاد أتخيل نسق « فريجه » الأنطولوجى والمعرفى فى وقت واحد وهو يبدأ من طرف يقينى [الأفكار الموضوعية] ويتجه إلى طرف ظنى [العالم الخارجى] مرورا بالنفس [الأفكار الذاتية] التى تتأرجح بين الطرفين . يقول « فريجه » :

> « ... فلا أكاد أوفر محيطا مضمونا لذاتى حتى أجدنى معرضا لمغبة الوقوع فى الخطأ [من جديد] ، حيث أواجه بتمييز آخر بين عالمين : داخلى وخارجى . انى لا أشك فى أن لدى انطباعاً [باللون] الأخضر [عالمى الداخلى] ، لكن من غير المؤكد أن ماأراه [عالمى الخارجى] هو ورقة زيزفون . ولهذا فاننا ــ على العكس مما هو شائع من أراء ــ نلمس يقينا فى العالم الداخلى بينما لا يرفع الشك أطرافه عنا تماما خلال رحلتنا نحو العالم الخارجى » [17]

يرى « فريجه » اذن أن معرفتنا بالعالم الخارجى ليست معرفة يقينية ، وان كان بها درجة احتمال « ليست بعيدة عن اليقين » . ولم يفسر « فريجه » سبب اعتقاده بذلك ، كما لم يوضح لنا ماإذا كانت درجة الاحتمال التى أشار اليها تتزايد مع وجود بينة تجريبية تؤيد فرضا نأخذ به [18]

ومن الملاحظ أن طريقة « فريجه » فى تناول المذهب الشكى حول النفس والعالم تأتى مشابهة لطريقة « ديكارت » ، حيث يبدأ بإثبات وجود النفس ثم ينتقل منها إلى اثبات وجود العالم الخارجى ، وكان « ديكارت » يرى أن مانحن

17- Frege, Op. Cit., P. 358

18- Currie, Frege, An Introduction.., P. 184

على وعى مباشر به تماما هو النفس ، ويستدل على وجود الأشياء الخارجية انطلاقا من وجود النفس ، وربما كان الاستدلال هنا احتماليا أكثر منه يقينيا . كما نلاحظ أن « فريجه » وإن أصر بطريقة كانطية على أنه لا يمكن أن توجد أفكار ذاتية دون حامل لها ، فانه اختلف عن كانط فى مدى التيقن من العالم الخارجى . لقد عارض « كانط » القول بأن ليس لدينا خبرة مباشرة بالأجسام فى المكان وهو ماذهب اليه « فريجه » ، وأكد « كانط » على أن وعينا بذواتنا يتضمن معرفة مثل هذه الموضوعات ، ومن ثم ذهب إلى أن يقيننا من وجود العالم الخارجى يرتبط رباطا لا ينفصم بيقين وجود الذات .

4 - عالم الأفكار وعلاقته بالعالمين الآخرين :

يتسم المجال الثالث أو عالم الأفكار بالموضوعية والاستقلال ، تقطنه كيانات ثابتة لا زمن لها ، تؤثر فى عالم الحالات النفسية وعالم الأشياء المادية ولا تتأثر بها . ولكى نفهم طبيعة هذا العالم ومحتوياته نسوق هذا التمييز بين الموضوعى والذاتى عند النظر فى القضية . يرتبط معنى القضية عند « فريجه » بالمحتوى Content ويقصد به أمرا موضوعيا ، لا بالتقرير assertion الذى يرتبط بالأفكار الذاتية ، ومن ثم فمعنى القضية ليس فكرة بمعناها الذاتى حين تصير الفكرة مجرد إنطباع حسى من جانبنا عن العالم مصحوبة بذكريات وتخيلات ورغبات [19] . ويرتبط بذلك قول « فريجه » أن لكل شخص طريقة فى التفكير الذاتى ، بينما ينتمى مالدينا من أفكار موضوعية إلى مجال موضوعى هو المجال الثالث Third Realm [20] . والفكرة الموضوعية فى زى قضية تتفق مع الشىء

19 - محمود زيدان : **المنطق الرمزى نشأته وتطوره** ، ص 160 ، وأيضا :
محمود زيدان : **فى فلسفة اللغة** ، ص 118

20 - أطلق بعض الكتاب على المجال الثالث اسم « عالم المعانى » realm of senses ، وقد تؤدى هذه التسمية إلى نوع من اللبس لدى القارىء حين يظن أن « فريجه » كان معنيا بحديثه هنا عن نظرية فى المعنى أو بعالم المعانى (فى مقابل عالم الاشارة) . بينما كانت نظرية « فريجه » أكثر شمولا وواقعية فى رأينا . راجع فى ذلك :

Thiel, C., Sense and Reference On Frege's Logic, P. 115

وقارن مايذهب اليه د . محمود زيدان : **فى فلسفة اللغة** ص : 118 121

المادى فى أنهما ليسا من خلق الانسان وانما موضوع اكتشاف ، ومثال ذلك أن محتوى قضية تاريخية أو جغرافية مستقل عن وجود المؤرخ أو الجغرافى وسابق على معرفتهما بكل قضية . وكما أشرنا فى موضع سابق ينسحب نفس الأمر على قضايا الرياضيات وقوانينها . الا أنه لما كان للفكرة واقعها الموضوعى المستقل فانها تختلف فى ذلك عن الشيء المادى فى أنه لا يمكننا ادراكها ادراكا حسيا .

لكن ما العلاقة بين الطرفين عالم الأفكار من ناحية وعالم الحالات النفسية والعالم المادى من ناحية مقابلة ؟ هل هى علاقة تفاعل أو تأثير متبادل أم أنها تأثير من طرف واحد ؟

يذهب « فريجه » إلى أنها علاقة تأثير من طرف واحد ، هو الطرف الأقوى ، أى الفكرة (محتويات العالم الثالث) . وبيان ذلك مايحدث فى عملية التفكير ، فالتفكير السليم هو ادراك أو تحصيل فكرة بمعناها الموضوعى ، وتحدث الفكرة فى الذهن تأثيرها الذى ينتقل خلاله إلى العالم الطبيعى . فالتغييرات تطرأ على العالم الداخلى لمن يفكر ، وينتج عنها خواص عرضية الا أنها غير محسوسة . وان كنا نفتقد فى مثل هذه الحالة إلى مانلاحظه من تفاعل ظاهر فى العمليات الفيزيائية فلا يدفعنا ذلك لنفى الواقعية عن الأفكار ونسبتها إلى الأشياء المشاهدة وحدها « فكم تبدو واقعية مطرقة مختلفة تماما عن واقعية فكرة .... ، ان الأفكار ليست غير واقعية بالمرة ، بل تختلف واقعيتها عن واقعية الأشياء ، أما تأثير الأفكار فيتم نتيجة لاعمال عقل المفكر ، وبدون ذلك لا نلحظ أثرا للأفكار ، وعلاوة على ذلك فان من يفكر لا يخلق الأفكار من عدم بل يسلم بها كما هى »[(21)] . وعندما تتجاوز الفكرة نطاق الارادة الداخلية وتبرز فى نطاق العالم الخارجى يتضح تأثيرها أو تتحقق أمامنا فى الواقع دون افتقارها لهذا الواقع لأنها مستقلة عنه فى الأصل ، ومثال ذلك عندما يفهم الواحد منا فكرة كمبرهنة فيثاغورس ، أو أى قانون علمى ، ويدرك صدقها ثم يبدأ فى تطبيقها فى الحياة العملية .

21- Frege, Thoughts, Op. cit., PP. 361- 2

ويحدد « فريجه » المعنى الذى يقصده من تأثير الأفكار على العالم الخارجى مرورا بالنفس ، حيث ينفى أن يتم هذا التأثير بمعنى ساذج مباشر أو بمعنى آلى . ويضرب مثالا على ذلك بمن يتصور قوانين الطبيعة ـــ باعتبارها أفكارا ـــ وقد أخذت بناصية الأرض تحركها فى مسار معين دون أن تحيد . حرى بنا أن نقول أن الشمس والكواكب يؤثر الواحد منها فى الآخر بما يتسق والقانون ـــ ذلك أنه لا يمكن للأفكار فى ذاتها أن تؤثر فى الأجسام بطريقة مباشرة كما لا يمكن ادراكها ادراكا حسيا مباشرا . يقول « فريجه » :

« عندما يتكلم أحد عن واقعية الأفكار ، فان مانفهمه هو أن معرفة إنسان بقانون طبيعى ـــ على سبيل المثال ـــ تؤثر على قراراته ، بحيث يصبح لديه نتائج مدعَّمه عن حركة الكتل ، ومن ثم ينظر إلى الالمام بقانون على أنه يؤثر فى الموضوع المعروف بنفس الطريقة التى تحتوى فيها عملية مشاهدة زهرة من تأثير غير مباشر للزهرة على المشاهد لنتحدث اذن عن تأثير للأفكار على الناس ، إلا أن ذلك لا يسوغ لنا أن نتصور وجود تأثير للناس على الأفكار »[22]

وتوضح العبارة الأخيرة من قول « فريجه » مايذهب اليه من أننا نكشف عن الأفكار وندركها إلا أننا لا نخلقها من عدم ولا نبتكرها من بنات أفكارنا الذاتية . ورغم ذلك فهناك من يستنتج من أقوال « فريجه » السابقة أن الأفكار واقعية بقدر ماتؤثر فينا وبقدر ماتؤثر فى الواقع ؛ وبالتالى فالواقعية هنا لا يقصد بها معنى أنطولوجيا مفارقا أو مستقلا ، وانما لها معنى ابستمولوجى فقط مغلف ببراجماسية غير خافية . ونحن لم نعهد فى كتابات « فريجه » أى نزعة براجماسية بل كان يحاربها بالاضافة إلى النزعة الذاتية . بل ويذهب هؤلاء أيضا إلى أن بقية أنواع الكيانات المجردة كالأعداد والدالات وقيم الصدق لا تتمتع

22- Frege, Nachgelassene Schriften, ed. by : Hermes, Kambartel and Kaulbach. [1069]. Quoted from, Currie, " Frege On Thoughts " P. 244

بأى واقعية [23] . وقد جاء حكمهم هذا استنتاجا من نفى « فريجه » فكرة الحيز المكانى عن الواقعية التى ينسبها لعناصر العالم الثالث ، وهذا تأويل خاطىء فى رأينا ، ويمكن أن نستند فى الرد على دعواهم بكلام « فريجه » نفسه : فهو يقول فى الفصيل [16] من كتابه أسس علم الحساب : « انى أميز بين ماهو موضوعى وبين مايشغل حيزا مكانيا أو يعد واقعيا » ، ولا شك أن الواقعية التى يشير اليها هنا ويعطفها على الحيز المكانى هى واقعية المحسوس ، وهى غير الواقعية التى يضفيها على الأعداد والكيانات المجردة ، ودليلنا إلى ذلك وصفه للأعداد — فى الفصيل 85 من نفس الكتاب — بالواقعية Wirklich [24] ، مع أنه لا يمكن ادراكها ادراكا حسيا أو مكانيا . يتحدث « فريجه » اذن عن واقعية بمعنى خاص ، وحين يميزها عن الواقعية المادية (واقعية العالمين النفسى والمادى) فهو يؤكد معنى وينفى آخر ، يؤكد لها ثباتا وخلودا لا يتأثر بنا ، وينفى عنها أن تتوقف واقعيتها على ملاحظتنا لها ، وبضدها تتمايز الأشياء .

لا مجال إذن لتساؤلات من هذا النوع : ما الفائدة التى تعود علينا من ذلك الكيان الثابت الخالد الذى لا يتأثر بنا ، ولا يؤثر فينا بطريقة مباشرة ؟ وماذا تعنى الأفكار بالنسبة لى أن لم أحصلها بنفسى ؟! ألا ينبغى أن ينشأ مالازمان له بطريقة أو بأخرى عما هو زمنى ؟ [25]

وفى رأينا فان مثل هذه التساؤلات تثير نوعا من الخلط المقصود ، خلط يراد به أن ننفى صفات الموضوعية والثبات عن كيانات العالم الثالث (الأفكار والأعداد والقضايا ..) حين نردها إلى موضوعات عالم الحالات النفسية والعالم المادى ونتصور أن هذه الكيانات إنبثقت عن الموضوعات المادية بالتجريد ، وهذا أمر لا يتسق مع خطة « فريجه » فى استقلال الأفكار الموضوعية عما هو ذاتى ونسبى ومحل تغير ... الخ

23- Currie, Op. cit., P. 236

24- Frege, The Foundations.., Sections : 16, 85

25- See for example : Currie, " Frege On Thoughts ", P. 236

وفى مرحلة لاحقة نجد من يرى فى آراء « فريجه » عن واقعية الأفكار واستقلالها تعبيرا عن فيلسوف « مثالى كانطى » أكثر منه « واقعى أفلاطونى » . فالكانطى يرى أن أشياء العالم الفيزيائى واقعية بمعنى أن الآثار التى تخلفها **تحددها قوانين لا نملك ناصيتها** ، وتلك القوانين لها نفس المعنى لدى كل الأفراد لكن **لا يمكن اعتبارها واقعية بالمعنى الأفلاطونى** أى أن تكون مستقلة عن الوعى تماما .(26)

والرد على هؤلاء بسيط جدا ، فهم يسلمون بأن ثمة قوانين لا نملك ناصيتها [أى مستقلة عنا تماما] ، ثم ينفون عن مثل هذه القوانين أن تكون واقعية بالمعنى الأفلاطونى ، بل تنشأ واقعيتها ـــ فى نظرهم ـــ بين ذواتنا ...

ونقول من جانبنا : ان ماينشأ بين الذوات هو سمة الموضوعية التى ندركها وننسبها لهذه الكيانات ، ولم تتفق حولها الذوات إلا لصحتها وصدقها وثباتها ، أما الواقعية فهى حال تلك الكيانات التى تقوم به ويقوم بها فى عالم مستقل حتى فى غياب ادراكنا لها ووعينا بها ، بل فى غيابنا عن الوجود تماما تظل لمثل هذه الكيانات واقعيتها . ان الأفكار وكافة موضوعات العالم الثالث تطل علينا فندركها ونعى موضوعيتها لكن حذار أن ننسب وجودها لادراكنا أو نردها فى النهاية لأنفسنا . يبدو لى أن هذا مايقصده « فريجه » ومن نهج نفس المنهج من السابقين عليه واللاحقين به على اختلاف فى مستويات التبرير والتأويل .

وأعتقد أن اقبال الفلاسفة وفلاسفة العلم على القول بعالم للأفكار مستقل لم يأت من فراغ وانما كان له مايبرره من ضرورات واقعية ومنطقية ، تشير ببساطة إلى تعثر الانسان وسط حقائق لا قبل له بها من حيث الخلق والابداع ويتوقف دوره تجاهها عند حدود الكشف ومحاولة الفهم والتفسير .

ونجد أنفسنا نتساءل فى مواجهة من ينكرون ضرورة وجود عالم مستقل ـــ عن الخبرة الانسانية ـــ للكيانات المجردة :

26- Currie, Frege, An Introduction.., P. 181

— هل نخلق — نحن — القوانين أو السنن الكونية عند اكتشافنا لها ؟!

— هل تبدأ الطبيعة فى الرضوخ لسنة معينة ، أو لقانون محدد حال إلمامنا به ؟

— هل تظل حقائق الرياضيات متعثرة ، حتى يأتيها الانسان بخبراته المحدودة ليقيل عثرتها ؟

ليس أمامنا سوى أن نعترف بأن « فريجه » عندما قال بعالم للكيانات المجردة مستقل ، كان يفسر مايراه من علاقة بين الثابت والمتغير ؛ فسواء توصلنا إلى قانون باستقراء وقائع تندرج تحته وتدل عليه أو توصلنا اليه باستنباط من قوانين أعم وأشمل منه ، فالقانون موجود قبل قيامنا بالاستقراء والاستنباط ، أى قبل اكتشافنا له . وعلينا أن نفترض عكس ذلك ؛ لنتصور مثلا أن العالم بما فيه من ظواهر شتى وقد انتظر — بفارغ الصبر — ظهور الانسان على سطح البسيطة ، ثم انتظر العالم مرة ثانية نمو المعارف الانسانية حتى بلغت أوج مابلغت ، لينطوى العالم بظواهره ويصبح ملك يمين مقترحات الانسان من قوانين ونظريات قابلة للتعديل والتطوير .

ان الحقائق والقوانين والنظريات والأفكار والأعداد والقضايا وغيرها مما لم نكتشفه بعد ، كيانات تتسم بالاستقلال عنا وعن وسائل كشفنا لها ، تلك هى الحقيقة التى ينبغى أن نؤمن بها ونعتقد بها فى آن واحد . ان العالم الثالث يحتوى أيضا مشكلات لم نكتشف حلولا لها بعد ، بل ان بعضها لا يقبل الحل ، وبعضها الآخر مبرهنات ليس لنا من سبيل للبرهنة على صحتها مثل مبرهنة « جولد باخ » وتقول « كل عدد من الأعداد المطردة هو مجموع عددين أصليين » ، وكذلك بديهية « اللا نهائية » التى نسلم بها واثقين من صحتها ومن عدم نفاذ عملية العد ، وليست الخبرة هى مصدر معرفتنا أو ثقتنا بهذه البديهية ، لأن الخبرة أو التجربة تعلمنا أن جميع الأشياء لها نهاية فى جميع العمليات الأنسانية ، ونعلم أن أى محاولة منا لاستنفاد العد بالعد تنتهى دائما بنهايتنا نحن دون أن نتحقق تجريبيا من صدقها .[27]

---

27 - توبياز دانزج : **العدد لغة العلم** ، ترجمة د . أحمد أبو العباس مكتبة مصر ، القاهرة ، ص :65

5 - الاتجاه الابستمولوجي :

انقسم الكتاب فى تقويم فلسفة « فريجه » من الناحية الابستمولوجية والأنطولوجيه إلى فريقين ؛ فريق يرى فى « فريجه » فيلسوفا واقعيا ميتافيزيقيا وابستمولوجيا فى نفس الوقت ، ومن هؤلاء « بوبر » و « دميت » [28] . وفريق عرض فلسفة « فريجه » من منظور ابستمولوجي وتوقف — بصدد ماناقشه فى بحثنا هذا — عند حدود التسليم بوجود الأعداد وموضوعيتها لأسباب ابستمولوجية فقط ، دون التطرق أو التحمس لحديث عن واقعية بالمعنى الأفلاطونى ومن هؤلاء « كورى » [29] .

ونحن وان كنا نميل إلى الرأى القائل بواقعية أفلاطونية فى فلسفة « فريجه » ، فلا يعنى ذلك اننا نعارض القول باتجاهات ابستمولوجية لديه ؛ فان من يقرأ « فريجه » يلمس بوضوح اهتمامه بالمعرفة بصفة عامة وبمعرفة علوم الرياضيات بصفة خاصة . وما فلسفة « فريجه » إلا تعديل وتطوير دائمين لعناصر قيام المعرفة . وقد جاءت خطته فى المنطق بمثابة محاولة لانقاذ المعرفة الرياضية من عبث الشكاك ، وماتناولناه من موضوعات فى فصول هذا الكتاب يشكل الأنطولوجي والابستمولوجي منها نسيجا واحدا . ومن ثم فنحن لا نبدأ هنا حديثا جديدا بقدر مانواصل حديثا بدأناه منذ الصفحات الأولى لهذا البحث .

بدأ « فريجه » حياته العملية بالتأكيد على أن معرفتنا بعلم الحساب معرفة قبلية ، فقد كان يرى أن أفضل أنواع المعرفة هو مايخلو من الشك . وقد أشرنا فى مواضع سابقة إلى معارضة « فريجه » للنزعة النفسية ومايرتبط بها من أحكام نسبية حين تطابق بين الأعداد والأفكار بالمعنى الذاتى ، وراح يبحث عن سبل تحقيق الموضوعية كمطلب أساسى لتبرير الرياضيات فواجهته صعوبات جمة .

28- Popper, K., [1972] **Objective Knowledge, An Evolutionary Approach**, Oxford.

Dummett, M., **The Interpretation of Frege's Philosoply**,

29- Currie, G., " Frege on Thoughts " Op. cit.

---------------- **Frege, An Introduction to his Philosophy op. cit.**

ورأى أن هذه الموضوعية التى ينشدها يمكن أن تتحقق بتوفير ضمان يتمثل فى قدرتنا على الادراك السليم لواقع الرياضيات . واقترح أن سبيلنا إلى ذلك هو بيان أن المعرفة الرياضية هى معرفة الحقائق المنطقية ، وأن مانواجهه من مشكلات سوف ينتهى حال أن نثبت قدرتنا على التعرف على هذه الحقائق الواضحة بذاتها والتى تعد أكثر القوانين عمومية وتشكل أساساً لكل عملية استنتاجية .

وقد قدم « فريجه » صياغة أولية لهذه الحقائق فى بحثه « تدوين الأفكار » ، ثم قدم صورة أكثر نضجا وتطورا فى كتابه **القوانين الأساسية لعلم الحساب** ، وتتمثل فى سبع بديهيات أو مااعتبره قوانين أساسية لكل استدلال [30] . وقد أشار « فريجه » إلى أنه يمكن اشتقاق كل حقائق علم الحساب من هذه البديهيات فى ضوء مجموعة من قواعد الاستدلال التى وضعها . إلا أنه لاحظ أن كيانات علم الحساب ــ وبخاصة الأعداد ــ تتسم ببساطة لا تتناسب معها التعبيرات المركبة للرموز الأساسية للقوانين التى قال بها ، فرأى ضرورة أن يصوغ سلسلة من التعريفات يعتمد فيها اللاحق على السابق . [31].

ورغم حـــذر « فريجه » عند صياغة البديهيات وقواعد الاستدلال والتعريفات وشروط التعريف ... الخ ، مما يعد عملا رائدا فى تاريخ الأنساق وبنائها ، إلا ان احدى بديهياته ، وهى البديهية الخامسة ، وتعنى بتحديد مجالات قيم الأعداد عن طريق الربط بين التصورات والموضوعات المطابقة لها [32] ؛ كان يشوبها الغموض ، رغم اعتقاد « فريجه » أنها بديهية منطقية خالصة [33] . وقد أفاض « فريجه » فى شرح هذه البديهية ودورها الهام فى قيام علم

30- Frege, **The Basic Laws of Arithmetic,** Translated & edited by " Furth " , P. 105

31- Kneale, W & M., The Development of Logic, PP. 507-9

32 : صيغة البديهية الخامسة بلغة « فريجه » الرمزية :

⊢ (E' F (E) = a' g (a) } = (⌣ F (a) = g (a)

وتصاغ بلغة رمزية معاصرة هكذا :

x̄ f (x) = x̄ g (x) ↔ (x) (f (x) ↔ g (x)

راجع مقدمة « فورث » لترجمة الجزء الأول من القوانين الأساسية ص : xi

33- Frege, Basic Laws, in Grach & Black's Translations, P. 138

الحساب ؛ فهى أساسية لنسقه ولا يمكن اشتقاقها من قانون أساسى آخر . الا أن ذلك كله لم يمنع « رسل » من اكتشاف ماتنطوى عليه البديهية من تناقض مما عرف بأغلوطة رسل Russell's Paradax[34] . يشرع « رسل » فى بيان التناقض بقوله : « نطلق على شيء أنه ينتمى إلى فئة عندما ينطوى تحت تصور تعد الفئة نطاقا له أو بمثابة ماصدق له . لنتأمل بحذق التصور « فئة لا تنتمى لذاتها » ، ان ماصدق هذا التصور [ان أمكن الحديث عن ماصدق له] هو « فئة الفئات التى لا تنتمى لذواتها » ، لنطلق عليها اختصارا الفئة K . ونتساءل حينئذ : هل هذه الفئة K تنتمى لذاتها ؟ لنفترض أولاً أنها كذلك ونحلل هذا الافتراض : لو أن شيئا ينتمى إلى فئة ، فانه ينطوى تحت التصور التى تكون الفئة ماصدقا له ، ومن ثم فان كانت الفئة تنتمى إلى ذاتها [وهذا ماافترضناه] ، فانها فئة لا تنتمى لذاتها ، وهذا تناقض ذاتى . ولنفترض ثانية أن الفئة K لا تنتمى لذاتها فانها تنطوى حينئذ تحت تصور هى ماصدق له ، ومن ثم فانها تنتمى لذاتها . وهذا تناقض ذاتى آخر » .[35]

ومحاولة للخروج من هذا المأزق عاد « فريجه » لتأمل القول بأنه قد توجد تصورات دون فئات مطابقة لها . فان كان تصور فئة ليست عضوا فى ذاتها هو أحد هذه الفئات ، فسوف تختفى أغلوطة رسل بالطبع ، مادامت لن توجد فئة كل الفئات التى ليست أعضاء فى ذاتها ـــ إلا أن « فريجه » لم يستطع أن يروض نفسه على هذا الابتكار غير المألوف ، وحاول أن يتجنب الوقوع فى التناقض بإدخال تعديل على بديهيته الخامسة التى طالما راودته شكوك حولها . وهنا اقترح أن يكون لتصورين نفس الماصدق إذا كان كل موضوع ينطوى تحت

34- الاغلوطة : عبارة يؤدى التسليم بها إلى الوقوع فى تناقض ؛ فى حالة صدقها ، وحالة صدق نقيضها أغلوطة رسل : ان سلمنا بالعبارة « فئة الفئات التى ليست عضوا فى ذاتها » تنشأ الأغلوطة عند محاولة الأجابة بنعم أو لا على السؤال : هل تلك الفئات المشار اليها عضوا فى ذاتها » .
نقلاً عن :

Greenstien, C. H., **Dictionary of Logical Terms And Symbols**, items, Paradox, Russell's Paradox.

35- Kneale, Op. cit., PP. 652- 53

التصور الأول (لكنه ليس بذاته ماصدقا له) ينطوى تحت التصور الثانى والعكس صحيح . إلا أن هذا التعديل لم يقنع المناطقة ، ولم يحرر نسق « فريجه » من عدم الاتساق .[36]

وهنا أصبحت الحقيقة الرياضية بوصفها حقيقة موضوعية لا تتمتع إلا بدرجة تخمين عالية فقط ، ولم يعد اليقين أساسا تنشأ عنه . لذلك عاد « فريجه » فى ختام حياته ليعيد النظر فى أسس علم الحساب ، ورأى أنه يمكن أن يقوم على هندسة حدسية قبلية بدلاً من أن تصبح المعرفة الرياضية ظنية . وهكذا تخلى « فريجه » فى لحظة تردد عما نادى به طوال حياته وهو رد الرياضيات — وعلم الحساب على وجه الخصوص — إلى المنطق .

وقد يرى البعض فى آراء « فريجه » الجديدة انحرافا أو انقطاعا عن أعماله السابقة . إلا أنه يؤكد على الاتصال بين آرائه السابقة واللاحقة ، وخاصة مايتعلق منها بالابستمولوجيا .

6 - مصادر المعرفة

تدور المقالات الأخيرة لفريجه حول مسائل ابستمولوجية فى محاولة منه لرأب الصدع بين آرائه فى أعماله المختلفة ، وعنوان احدى هذه المقالات « محاولة جديدة لوضع أساس لعلم الحساب » (1024) ، بدأها بتعريفه لمصطلح « مصدر المعرفة » : « أقصد بمصدر المعرفة الوسائل التى تسوغ لنا تمييز الحقيقة ومعرفتها ، وإصدار الأحكام » .[37] فمصدر المعرفة مجموعة من السبل والقواعد التى تكسبنا ملكة التمييز بين الحقائق وتحصيل المعرفة ثم القدرة على اصدار الأحكام . فاكتساب المعرفة — فى ظنى — عند فريجه لا يتوقف عند حدود المعرفة الساذجة ، أو المعرفة المباشرة ، وانما هى معرفة نقدية . ويؤيد هذا الظن التصنيف الذى أقامه لمصادر المعرفة :

(36) Ibid, P. 653.

37- Frege, [1925] " A New Attempt at a Foundation for Arithmetic " in Long and White (trs.) : Oxford, 1979, P. 278

ـــ الإدراك الحسى

ـــ المنطق مصدرا للمعرفة

ـــ الهندسة مصدرا للمعرفة

وبالنظر فى هذا التقسيم الثلاثى لمصادر المعرفة وطبيعة هذه المصادر ، تطل علينا تمييزات « كانط » الابستمولوجية . ومايهمنا بهذا الصدد أن « فريجة » يؤكد على ماسبق أن أقره طوال حياته وهو أن المعرفة بعلم الحساب مستقلة تماما عن الخبرة الحسية ، فالمصدر الأول إذن مستبعد كأساس لعلم الحساب وهذا أمر يتفق فيه « فريجه » مع معظم فلاسفة العلم . أما رؤيته الجديدة فتتعلق بالدرجة الأولى بالبحث والمقارنة وإعادة تقويم مدى جدارة كل من الأسس المنطقية والزمكانية كمصادر للمعرفة . وقد انتهى إلى أن المصدر المنطقى للمعرفة مصدر غير خالص على خلاف مايبدو لنا ، ويمكن أن يؤدى بنا إلى الوقوع فى الخطأ ، وقد نشأ هذا الموقف لدى « فريجه » فى أغلب الأمر بتأثير من أغلوطة « رسل » ، بل إن « فريجه » يصل به الأمر حد القول أننا قد لا نحقق شيئا إن اعتمدنا على المصدر المنطقى وحده . [38] ينفى « فريجه » أن تقوم المعرفة بالحساب على الحواس ، وكذلك يظل على تمسكه بمقولة طالما رددها وهى « إن الأعداد موضوعات » لكنه يضيف أن المصدر المنطقى لا يزودنا بمعرفة عن وجود الأعداد بالاضافة إلى أنه لن يزودنا بمعرفة عن علم الحساب . والعبارة الأخيرة توضح بجلاء مسألة تستأثر بفكر « فريجه » وهى انشغاله بوجود الأعداد (أنطولوجيا) فى غمرة بحثه عن مصدر جديد للمعرفة (ابستمولوجيا) . وهذا يؤكد مانذهب إليه من أنه يصعب أن نفصل فى فلسفة « فريجه » الرياضية ـــ وعلم الحساب على وجه الخصوص ـــ بين مايتعلق بالمعرفة ومايتعلق بالوجود .

ويمكن القول بأن مادفع « فريجه » إلى هذا الموقف لم يكن مجرد تفضيله للحل الكانطى لمشكلة واجهته ، وانما رغبته فى أن يضع الرياضيات على طريق آمن باستخدام وسائل بعينها ، وأكثر الوسائل التى رآها مناسبة لتحقيق هذا

38- Kitcher, Op. cit., PP. 260-61

الهدف هى المعرفة القبلية التركيبية . [39] وهنا يبقى أمامنا المصدر الهندسى للمعرفة .

يؤخذ المصدر الهندسى للمعرفة على أنه أقل المصادر تشويشا ، ويذهب « فريجه » إلى ماهو أبعد حين يؤكد أن هذا المصدر يمدنا أيضا بمعرفتنا عن اللا متناهى . ومن ثم اقترح أن نعتبر معرفتنا بالأعداد المركبة معرفة أولية ومعرفتنا بالأعداد الطبيعية على أنها معرفة مشتقة . وهنا تصبح الظاهرة الحسابية الأساسية هى القياس measuring وليست العد Counting . وراح « فريجه » يبرهن على أن ماتتسم به عملية العد من أولية هو مجرد خداع [40] .

« كيف يتسنى لمعرفتنا بالرياضيات أن تصبح كما ينبغى لها أن تكون ؟ » مشكلة قديمة وحل جديد يتمثل فى الحدس الخالص . وقد ينشأ اعتراض مفاده أن « فريجه » قد عارض فى بواكير اعماله محاولة تأسيس المعرفة الحسابية على الحدس حين قال : « إننا على استعداد لتلمس الحدس الداخلى فى حالة واحدة فقط ؛ متى عجزنا عن إقامة أى أساس آخر للمعرفة » [41] والحقيقة أنه قال ذلك معبرا عن شكه فى أن تكون فكرة « الحدس الخالص للمقدار » فكرة ذات مضمون . بينما يقبل « فريجه » هنا الحدس الهندسى الخالص للسمات الأساسية لسطح مركب . وقد حاول أتباع « كانط » أن يطبقوا الحدس الخالص على الميادين المختلفة للرياضيات البحتة كما يطبق بوضوح فى الهندسة . وكانت النتيجة محاولة تأسيس علوم الجبر والحساب ونظرية الدالة استنادا إلى الهندسة . مما دعا « فريجه » للقول بأن الحدوس التى يقصدها هى حدوس هندسية خالصة ، ومن ثم كان على حق فى آرائه المبكرة والمتأخرة .
وفى ذلك يختلف « فريجه » عن « كانط » فى أنه لم يزعم أن معرفة علم الحساب تتم بحدس خالص للزمان ، بل أراد أن يوحد بين المعرفة فى كل من الحساب والهندسة : « إن كل الرياضيات هى الهندسة الحقة » . [42]

39- Currie, Frege, P. 187 40- Kitcher, Op. cit., P. 261 .41- Frege, The Foundations, P. 19

42- Frege, " Numbers and Arithmetic ", in Long and White, (trans.) : Posthumous Writings. Oxford, 1979, P. 277

وعلى أى حال فقد كشفت كتابات « فريجه » المتأخرة عن بدائل ابستمولوجية رآها متاحة بالاضافة إلى ماقال به قبل ذلك ، وجماع ماكتبه يدور حول ثلاثة بدائل :

(أ) ـــ نعرف علم الحساب استنادا إلى المصدر المنطقى وحده .

(ب) ـــ نعرف علم الحساب استنادا إلى الحدس الخالص فقط .

(ج) ـــ يمكن معرفة علم الحساب باستخدام الإدراك الحسى على حده .

وكما أشرنا فقد كان « فريجه » يرفض (ج) وجاءت أعماله السابقة على عام 1903 تنم عن رغبته فى اثبات (أ) ورفض (ب) ، وعندما ووجه بأغلوطة « رسل » القائلة بأن المصدر المنطقى للمعرفة لا يفيد معرفة عن وجود أى من الموضوعات الخاصة ، إستبعد (أ) وتفرغ لاكتشاف (ب) ، وراح فى نفس الوقت ينقح المعرفة الناتجة عن المصدر المنطقى .
نلاحظ أن هناك تغييرا ، إلا أن هذا التغيير تم داخل نظام يتكون من عناصر متماسكة ، فلم يعصف هذا التغيير فى رأينا باتجاهات فريجه الأساسية وانما كان محاولة مستمرة لابقاء النسق الذى ينادى به متماسكا .

ونعود إلى الفرض الأساسى لبحثنا وهو أن اهتمام « فريجه » بتبرير معرفتنا بعلم الحساب قد نشأ عنه ضرورة مناقشة وجود الأعداد بالاضافة إلى كيانات أخرى ، ومن ثم اتخذ موقفا انطولوجيا يرتبط بموقف ابستمولوجى ولنفسر مانراه فى ضوء البدائل الأخيرة . كان العقل هو مصدر الأعداد لدى « فريجه » فى مرحلة مبكرة من حياته العملية ، وكان الناس يدركون ذلك ـــ فى رأيه ـــ اعتمادا على ملكة الاستدلال . ولم يكن « فريجه » ـــ فى ذلك الوقت ـــ ينظر إلى الأعداد على أنها موضوعات بل يرى أن علم الحساب يقوم على التصورات وحدها . ثم تخلى عن ذلك الموقف وسلم بالبديهية الخامسة كوسيلة للانتقال من التصور إلى موضوع مطابق له : إلى ماصدق أو إلى قيم صدق ..... ولما كانت البديهية الخامسة هى المصدر الوحيد لما لدينا من معلومات عن مجالات القيم ، وتعجز عن تحديد مجالات القيم فى حالات كثيرة بما فيها الأعداد ، فإن الأعداد

بدت غامضة أمام العقل ومنوطا بها تحديد وتعيين الموضوعات ؛ ومن ثم كان لابد أن توجد الأعداد مستقلة عن العقل ، العقل الذى لا يحدد ماتكون عليه الأعداد لأن هناك الكثير مما يتعلق بها لا يدركه العقل .
دفعت اعتبارات من هذا النوع « فريجه » لقبول مايشبه الأنطولوجيا الأفلاطونية بصدد نظريته فى الأعداد بحيث تكون كيانات مستقلة بذاتها .

النتيجة التى ننتهى إليها فى هذا الفصل — ومن ثم فى هذا البحث — بعد مناقشة آراء فريجه » هى التسليم بضرورة وجود مجال أو عالم ثالث ، وهو ميدان الأفكار الذى سلم به « فريجه » واندهش له مفسرو فلسفة « فريجه » أنفسهم . ونميل إلى عدم الفصل بين الجانبين الابستمولوجى والأنطولوجى للمسألة . وسواء كانت ضرورة التسليم بمجال ثالث — بالاضافة إلى العالمين الفيزيائى والنفسى — مبعثها حل مشكلات إبستمولوجية واجهت « فريجه » بصدد موضوعية الأعداد وضمان صدق قوانينها ، أم البحث عن سند أو مصدر أول للأفكار بما فيها الأعداد يضفى عليها يقينا وثباتا رآه فى عالم مستقل على الخبرة الانسانية ، فالنتيجة واحدة وهى تسليم « فريجه » بوجود مجال مستقل يحوى الأفكار الثابتة والقضايا وقيم الصدق والأعداد والحقائق المنطقية .



مصطلحـات

مصطلحات

آثرنا أن نورد هنا ثبتا بأهم مصطلحات « فريجه » التى تحمل معنى خاصا بفلسفته وترتبط ببحثنا بصورة مباشرة . وقد وضعنا المصطلح العربى المناظر لكل منها (مع عبارة شارحة فى بعض الأحيان) فى ضوء فهمنا لفلسفته أولاً ، كما إطلعنا عليها فى كتبه . وفى ضوء مايذهب إليه بعض شارحى فلسفة « فريجه » مثل « دميت » و « جيتش وبلاك » و « جونز » و « كورى » ثانيا .

ويمكن للقارىء إن ابتغى مزيدا من التفصيل أن يعود إلى موضع المصطلح داخل البحث .

تسليم يرى « فريجه » أن الحكم هو التسليم بصدق فكرة	Recognition	Anerkennung
عـدد يستخدمه « فريجه » للاشارة إلى الأعداد المستخدمة فى عملية العد	Number	Anzahl
تعبير	Expression	Ausdruck
يدل على ـــ يشير إلى	Stand For	Bedeuten
الدلالة ـــ اشارة استخدم « فريجه » المصطلح بمعنيين : ـــ فى كتابه الأسس : مغزى ، أهمية Significance / importance	Reference	Bedeutung

	entity referred to	ـــ فى أعماله المتأخرة مايشار إليه بمصطلح
Begriff	Concept	تصور (بالمعنى المنطقى)
Begriffsschrift	Concept writing	« تدوين التصورات المنطقية » يطلق على أحد كتب « فريجه » . وعلى لغته الرمزية ، أو أى لغة رمزية مشابهة .
Behauptungssatz	Declarative sentence	جملة خبرية يحكم عليها بالصدق أو الكذب
Eigennamen	Proper Names	أسماء الأعلام
Eigentliche Zahl	Actual Number	عدد حقيقى (فى مقابل ماهو عددى)
Erkenntinsquelle	Source of Knowledge	مصدر المعرفة
Figur	Figure	شكل
Formal	Formal	صورى ـــ شكلى
Funktion	Function	دالة كيان ناقص (غير مشبع)

Gedanke	**Thought**	فكرة (موضوعية) ماكانت موضع اتفاق بين من يفكرون
Gegenstand	**Object**	موضوع ــ شيء كيان كامل (مشبع)
Gleich	**Equal**	مساو
Gleichheit	**Equality**	مساواة
Gleichzahlig	**Equinumerate**	مساو عدديا (علاقة واحد بواحد بين موضوعات تصورين)
Inhalt	**Content**	فحوى (قريب من فكرة المعنى)
Inhaltlich	**Meaningful**	ذو معنى نعت لعلم الحساب فى نمطه غير الشكلى
Inhaltsgleichheit	**Identity**	الذاتية ــ الهوية
Irrationale Zahlen	**Irrational Numbers**	الأعداد الصماء

Objektiv	Objective	موضوعية خاصية للكيانات المستقلة عن الوعى الذاتى
Satz	Sentence propsition theorem	جملة ــ قضية ــ مبرهنة (حسب السياق)
See lischer	Mental process	عملية ذهنية (تتم فى نطاق النفس ومن ثم فهى غير موضوعية)
Selbständigkeit	Self-Subsistence	وجود بالذات إحدى صفات الأعداد
Sinn	Sense	معنى المحتوى الموضوعى لتعبير
Umfang	Extension (of a concept)	ماصدق ــ مجال
Urtheil	Judgement	حكم التسليم بصدق فكرة
Vorstellung	Idea-Image	فكرة ذاتية ــ انطباع
Wahrheitswerth	Truth-Value	قيمة صدق
Wirklich	Real	واقعى

المراجـــع

أولاً : المراجع العربية

امام عبد الفتاح امام [1969] :

المنهج الجدلى عند هيجل ، دار المعارف ، مصر

بلانشيه [1977] :

نظرية المعرفة العلمية [الابستمولوجيا] ترجمة حسن عبد الحميد [1986] مطبوعات جامعة الكويت .

توبياز دانزج :

العدد لغة العلم ترجمة أحمد أبو العباس ، مكتبة مصر ، القاهرة .

رسل [1903] :

أصول الرياضيات ، ترجمة عربية محمد مرسى أحمد ، أحمد فؤاد الأهوانى ، دار المعارف ، أربعة أجزاء [1964-1961-1959-1958]

رسل [1918] :

« فلسفة الذرية المنطقية » ، ترجمة عزمى اسلام [1987] فى كتاب **زكى نجيب محمود فيلسوفا وأديبا** ، مطبوعات جامعة الكويت ، ص : 380 335

زكى نجيب محمود [1980] :

نحو فلسفة علمية ، ط . ثانية ، الانجلو المصرية ، القاهرة .

عبد الرحمن بدوى [1963] :

مناهج البحث العلمى ، دار النهضة العربية ، القاهرة

عزمى اسلام [1985] :

مفهوم المعنى ، دراسة تحليلية ، حوليات كلية الآداب ، جامعة الكويت ، الحولية السادسة

فوزى مصطفى دنان وآخرون [1984] :

موسوعة الكويت العلمية ، الرياضيات ، مؤسسة الكويت للتقدم العلمى ـــ الكويت ، أربعة أجزاء .

مجمع اللغة العربية [1979] :

المعجم الفلسفى ، الهيئة العامة لشئون المطابع الأميرية ، القاهرة .

محمد ثابت الفندى [1969] :

فلسفة الرياضة ، دار النهضة العربية ، بيروت .

محمد محمد قاسم [1986] :

كارل بوبر ، نظرية المعرفة فى ضوء المنهج العلمى ، دار المعرفة الجامعية ، الاسكندرية

محمود زيدان [1979] :

المنطق الرمزى ، نشأته وتطوره ، دار النهضة العربية ، بيروت

محمود زيدان [1985] :

فلسفة اللغة ، دار النهضة العربية ، بيروت

يس خليل [1970] :

مقدمة فى الفلسفة المعاصرة ، دراسة تحليلية ونقدية للاتجاهات العلمية فى فلسفة القرن العشرين ، منشورات الجامعة الليبية .

ثانياً : المراجع الاجنبية :

Currie, G. [1980] : " Frege on Thoughts " Mind, Vol. 354 PP. 234 - 248.

---------------------- [1982] : **Frege, An Introduction to His Philosophy**, The Horuester Press Lim., London.

Dummett, M. [1972] : Frege, G. " in Encyclopedia of Philosphy, ed. by Paul Edwards " Vol. 3.

---------------------- [1973] : **The Philosophy of Language**, Duckworth, London.

---------------------- [1981] : **The Interpretation of Frege's Philosophy**, Duckworth, London.

Frege, G. [1879] : " Begriff sschrift ", a formalized Language of Pure Thought modelled upon the Language of Arithmetic " in, Geach & Black, **Translations from the Philosophical Works of Gottlob Frege**, Oxford (1966) PP. 1-20.

---------------------- [1884] : **The Foundations of Arithmetic**, (trans. by J. Austin), Oxford, 1950.

---------------------- [1891] : " Function And Concept " in Geach and Black (eds.) 1966, PP. 21- 41.

---------------------- [1892] : " On Concept And Object ", in Geach and Black (eds.), 1960, PP. 42 - 55.

---------------------- [1892] : " On Sense And Reference " in Geach and Black (eds.), 1966, PP. 56 - 78.

----------------------- [1895] : " The Whole Number ", Mind 79 PP. 481 - 86, 1970.

----------------------- [1903] : **The Basic Laws of Arithmetic**, Exposition of the System, Translated and Edited with an Introduction by Montgomery Furth [1964], Uni. of Calefornia Press. U. S. A.

----------------------- [1918] : " Thoughts " Rep. in Angellelli (ed.) [1967] Studies on Gattlob Frege and Tradional Philosophy, Dordreche : Reidel.

----------------------- [1924] : " Numbers and Arithmetic " in Long and white, [1979] (trans.), Posthumous Writings Oxford, PP. 275 - 7

----------------------- [1924] : " A New Attempt at a Foundation for Arithmetic " in Long and white (trans.) Oxford [1979], PP. 278 - 81.

----------------------- [1924] : " Sources of Knowledge of Mathematics and the mathematical natural Science in Long & white, op. cit., PP. 267 - 274.

Geach, P. & Black, M. [1966] : **Translation from the Philosophical Writings of Gottlob Frege**, Basil Black well, Oxford.

Greenstien, C.H., [1978] : **Dictionary of Logical Terms And Symbols**, Van Nostrand Reinhold Com., U. S. A.

Jones, W. T. [1975] : **A History of Western Philosophy**, The twentieth Century to wittgenstein and Sarter See ed., Harcourt Brace Jorxanovich Inc.

Kitcher, Ph. [1979] : " Frege's Epistemology " The Philosophical Review, Vol. Lxxx VIII.

Kneale, W. & M. [1984] : **The Devalopment of Logic** Oxford.
Long & White (Translators) [1979] : **Posthumous Writings**, Oxford.
Nidditch, P. [1963] : " **Peano** And the Recognition of Frege ", Mind, No. 285, PP. 103 - 110.
Runes. D. (ed.) [1981] : **Dictionary of Philosophy**, Littlefield, Adams & Co., U. S. A.
Thiel, Christian [1968] : **Sense And Reference In Frege's Logic**. D. Reidel Pub - Comp. Holland.
Wienphal, P. D. [1950] : " Frege's Sinn Und Bedutung " **Mind**, 236, PP. 483 - 494.

